CHƯƠNG 5

CÁC NHÀ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT: KHOA HỌC CỦA SỰ BẤT ĐỊNH

Thế giới không đứng yên. Hầu hết mọi thứ chung quanh chúng ta hoặc là chuyển động hoặc thay đổi không ngừng. Ngay cả Trái đất có vẻ vững chắc dưới chân chúng ta trong thực tế cũng quay xung quanh trục của nó, quay xung quanh Mặt trời và du hành (cùng với Mặt trời) xung quanh tâm của Dải Ngân Hà - thiên hà của chúng ta. Không khí mà chúng ta hít thở được tạo bởi hàng ngàn tỉ các phân tử chuyển động hỗn loạn, không ngừng. Đồng thời, cây cỏ tăng trưởng, các chất phóng xạ thì phân rã, nhiệt độ không khí thì lúc tăng lúc giảm mỗi ngày và theo mùa, và sự kỳ vọng vào cuộc sống con người cũng luôn tăng lên. Tuy nhiên, bản thân sự không ngừng nghỉ này của vũ trụ lại không gây khó dễ gì cho toán học. Nhánh toán học được gọi là *giải tích* do Newton và Leibniz phát minh ra cho phép phân tích một cách chặt chẽ và mô hình hóa một cách chính xác về cả chuyển động và thay đổi. Đến nay, công cụ tuyệt vời này trở nên rất hữu hiệu và bao hàm tất cả đến mức nó có thể được sử dụng để xem xét những vấn đề rất khác nhau như

chuyển động của tàu con thoi không gian hoặc sự truyền lan của căn bệnh truyền nhiễm. Giống như một bộ phim có thể nắm bắt được chuyển động bằng cách tách nó thành một chuỗi các khuôn hình liên tiếp nhau, giải tích cũng có thể tính toán được sự thay đổi trên một mạng lưới tinh vi đến mức nó cho phép xác định được các đại lượng chỉ tồn tại thoáng qua như tốc độ tức thời, gia tốc tức thời hoặc tốc độ thay đổi tức thời.

Tiếp tục những bước chân khổng lồ của Newton và Leibniz, các nhà toán học ở Kỷ nguyên Lý trí (cuối thế kỷ 17 và thế kỷ 18) đã phát triển giải tích thành một nhánh có khả năng ứng dụng mạnh mẽ và rộng lớn hơn - đó là nhánh *phương trình vi phân*. Được trang bị những vũ khí mới, các nhà khoa học giờ đây đã có thể trình bày các lý thuyết toán học chi tiết về các hiện tượng trải rộng từ âm nhạc tạo bởi một sợi dây đàn violon đến sự truyền nhiệt, từ chuyển động của con quay cho đến dòng chảy các chất lỏng và khí. Trong một thời gian ngắn, các phương trình vi phân đã trở thành công cụ được lựa chọn để tạo nên sự phát triển của vật lý học.

Một số nhà thám hiểm đầu tiên của vùng đất mới được mở ra bởi các phương trình vi phân là những thành viên của gia đình Bernoulli huyền thoại. Trong khoảng thời gian giữa thế kỷ 17 và giữa thế kỷ 19, gia đình này đã tạo ra không dưới 8 nhà toán học xuất chúng. Những cá nhân tài năng này cũng nổi tiếng về sự thù ghét cay đắng nhau trong nội bộ gia đình họ, hầu như cũng chẳng thua kém gì sự nổi tiếng của họ trong toán học. Trong khi sự bất hòa giữa những người trong gia đình Bernoulli luôn liên quan đến sự giành giật địa vị cao hơn trong toán học, thì một số vấn đề mà họ tranh cãi ngày nay dường như lại không phải là quan trọng nhất. Dù vậy, lời

giải cho những câu đố phức tạp đó thường lại mở đường cho những đột phá toán học ấn tượng hơn. Nhìn chung, không ai nghi ngờ gì về vai trò quan trọng của những người trong gia đình Bernoulli đối với việc đưa toán học trở thành ngôn ngữ của rất nhiều quá trình vật lý.

Một câu chuyện có thể minh họa cho sự phức tạp của hai trí tuệ ưu tú nhất của gia đình Bernoulli - hai anh em Jakob (1654-1705) và Johann (1667-1748). Jakob Bernoulli là một trong những người đi tiên phong của *lý thuyết xác suất*, và chúng ta sẽ còn quay trở lại với ông trong phần sau của chương này. Tuy nhiên, vào năm 1690, Jakob đang bận bịu với việc phục dựng lại một bài toán đã được người đàn ông tài hoa thời Phục Hưng là Leonardo da Vinci nghiên cứu lần đầu tiên hai thế kỷ trước: đó là bài toán tìm hình dạng của một sợi dây xích đàn hồi nhưng không giãn được treo vào hai điểm cố định (như trên H. 31). Leonardo đã phác thảo một vài sợi dây xích như vậy trong sổ ghi chép của mình. Bài toán này cũng được giới



Hình 31

thiệu với Descartes bởi người bạn của ông là Isaac Beeckman, song không có bằng chứng nào cho thấy Descartes đã thử giải nó. Cuối cùng thì bài toán này đã trở nên nổi tiếng với tên gọi là *bài toán catenary* (tiếng Latinh là *catena*, có nghĩa là "dây xích"). Galileo cho rằng hình dạng của sợi dây xích sẽ là parabol, nhưng đã được tu sĩ dòng Tên Ignatius Pardies (1636-73) chứng minh là sai. Tuy nhiên, Pardies đã không đi đến cùng trong việc giải thực sự bằng toán học để tìm ra hình dạng đúng.

Chỉ một năm sau khi Jakob Bernoulli đưa ra bài toán, em trai ông là Johann đã giải được nó (bằng một phương trình vi phân). Leibniz và nhà vật lý toán người Hà Lan Christiaan Huygens (1629-95) cũng giải được bài toán này nhưng lời giải của Huygens sử dụng một phương pháp hình học rối rắm hơn. Việc Johann giải được bài toán đã từng làm người anh và cũng là người thầy của mình phải bối rối vẫn tiếp tục là nguồn vui to lớn cho Bernoulli em, ngay cả 13 năm sau khi Jakob qua đời. Trong một bức thư Johann viết vào ngày 29 tháng 9 năm 1718, gửi nhà toán học người Pháp Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), ông không thể giấu được niềm vui sướng của mình:

> Ông nói anh trai tôi đã đặt ra bài toán này; điều đó đúng, nhưng liệu có suy ra rằng sau đó anh ấy đã giải được không? Hoàn toàn không. Khi anh ấy đưa ra bài toán này theo gợi ý của tôi (tôi mới là người đầu tiên nghĩ đến nó), thì không ai trong hai chúng tôi có thể giải được nó; chúng tôi đã hết hy vọng là nó có thể giải được, cho đến khi Leibniz công bố trên tạp chí Leipzig năm 1690, ở trang 360, rằng ông ấy đã giải được bài toán này nhưng không công bố lời giải của mình, mà

để thời gian cho những nhà toán học khác và điều đó đã kích thích chúng tôi, cả anh trai tôi và tôi, thử giải lại một lần nữa.

Sau khi đã vơ lấy một cách không xấu hổ quyền sở hữu của ngay cả cái việc gợi ý đưa ra bài toán, Johann tiếp tục với niềm vui không che giấu:

> Những nỗ lực của anh trai tôi chẳng đem lại kết quả gì; về phần mình, tôi đã may mắn hơn, vì tôi đã tìm ra một kỹ thuật (tôi nói điều này không hề có một chút khoác lác nào, mà tại sao tôi lại phải che giấu sự thật cơ chứ?) cho phép giải được nó một cách trọn vẹn... Sự thật là tôi đã phải trả giá bằng một đêm thức trắng... nhưng sáng hôm sau, vô cùng sung sướng, tôi đã chạy đến tìm anh trai tôi, khi ấy anh vẫn còn đang đánh vật một cách khốn khổ với bài toán hóc búa mà chẳng đi đến đâu cả, vì anh luôn nghĩ giống Galileo rằng *catenary* phải là một parabol. Dừng lại đi! Dừng lại đi! Tôi nói với anh ấy, đừng hành hạ bản thân anh để cố chứng minh hình dạng của *catenary* là parabol thêm nữa, vì nó hoàn toàn sai rồi... Nhưng sau đó ông đã làm cho tôi phải ngạc nhiên khi kết luận rằng anh trai tôi đã tìm ra lời giải bài toán này... Tôi xin hỏi ông, ông có thực sự nghĩ rằng, nếu anh trai tôi đã giải được bài toán đó, thì liệu anh ấy có tử tế với tôi tới mức không xuất hiện giữa những người đã giải được nó, và nhường tôi vinh dự được xuất hiện một mình trên sân khấu với danh hiệu là người đầu tiên, cùng với các ngài Huygens và Leibniz hay không?

Trong trường hợp nếu bạn cần một chứng minh rằng, xét cho cùng, các nhà toán học cũng là con người thì câu chuyện này đủ làm được điều đó. Tuy nhiên, sự ganh đua trong gia đình Bernoulli đã không lấy mất đi mảy may điều gì từ những thành tựu của gia đình ấy. Trong suốt những năm tiếp theo câu chuyện *catenary*, Jakob, Johann và Daniel Bernoulli (1700-1782) tiếp tục không chỉ giải được những bài toán khác tương tự về dây xích treo mà còn phát triển lý thuyết các phương trình vi phân nói chung và giải được bài toán về chuyển động của các vật phóng qua một môi trường có lực cản.

Câu chuyện về *catenary* con chứng minh một khía cạnh khác về sức mạnh của toán học - ngay cả với những bài toán vật lý tưởng như tầm thường cũng có những lời giải toán học. Bản thân hình dạng của *catenary* cũng vậy, nó vẫn tiếp tục làm thích thú hàng triệu du khách viếng thăm Cổng vòm nổi tiếng ở St. Louis, Missouri. Kiến trúc sư người Mỹ gốc Phần Lan là Eero Saarinen (1910-61) và kỹ sư xây dựng người Mỹ gốc Đức là Haanskarl Bandel (1925-93) đã thiết kế cái cấu trúc mang tính biểu tượng này có hình dạng tương tự như hình *catenary* lộn ngược.

Sự thành công đáng kinh ngạc của khoa học vật lý trong việc khám phá ra các định luật toán học chi phối hành vi của vũ trụ ở quy mô lớn đã không tránh khỏi làm nảy sinh câu hỏi, đó là liệu các nguyên lý tương tự cũng có nằm ẩn sau các quá trình sinh học, xã hội hoặc kinh tế hay không. Các nhà toán học cũng băn khoăn tự hỏi liệu toán học chỉ là ngôn ngữ của tự nhiên thôi hay nó cũng còn là ngôn ngữ của bản chất con người? Ngay cả nếu những nguyên lý phổ quát thực sự không tồn tại thì liệu các công cụ toán học, tối thiểu nhất, có được sử

dụng để lập mô hình và rồi sau đó giải thích được các hành vi xã hội hay không? Trước hết, nhiều nhà toán học hoàn toàn bị thuyết phục rằng "các định luật" dựa trên một kiểu tính toán nào đó, cũng đều có thể tiên đoán được chính xác tất cả các sự kiện trong tương lai, dù lớn hay nhỏ. Chẳng hạn, đó là ý kiến của nhà vật lý toán vĩ đại Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Năm tập của bộ *Mécanique céleste (Cơ học thiên thể)* của Laplace đã đưa ra lời giải thực sự hoàn chỉnh (nếu gần đúng) đầu tiên về các chuyển động của hệ Mặt trời. Thêm vào đó, Laplace còn là người đã trả lời được câu hỏi khiến ngay cả người khổng lồ như Newton cũng bối rối: Tại sao hệ Mặt trời lại ổn định như vậy? Newton cho rằng do sức hút qua lại lẫn nhau giữa các hành tinh nên chúng sẽ phải bị rơi vào Mặt trời hoặc bay ra xa vào không gian, và vì thế ông đã phải viện đến bàn tay của Chúa để giữ cho hệ Mặt trời được nguyên vẹn. Laplace lại có quan điểm khác. Thay vì dựa vào bàn tay của Chúa, ông đã chứng minh đơn giản bằng toán học rằng hệ Mặt trời ổn định trong khoảng thời gian còn dài hơn cả dự đoán của Newton. Để giải quyết vấn đề phức tạp này, Laplace đã đưa ra một hình thức luận toán học khác được gọi là *lý thuyết nhiễu loạn*, cho phép ông có thể tính toán hiệu ứng lũy tích của nhiều sự nhiễu loạn nhỏ lên quỹ đạo của mỗi hành tinh. Cuối cùng, đỉnh cao của nó là Laplace đã đưa ra một trong những mô hình đầu tiên về chính nguồn gốc của hệ Mặt trời - trong *giả thuyết tinh vân* rất có ảnh hưởng của ông, hệ Mặt trời được tạo ra từ một tinh vân khi bị co lại.

Với tất cả những chiến công ấn tượng này, có lẽ sẽ không có gì phải ngạc nhiên khi trong cuốn *Tiểu luận triết học về xác suất*, Laplace đã tuyên bố một cách táo bạo:

> Tất cả những sự kiện, ngay cả những sự kiện mà xét về tính quan trọng của chúng không tuân theo các quy luật vĩ đại của tự nhiên, cũng là một kết quả của nó, một cách tất yếu như sự sự quay của Mặt trời vậy. Bỏ qua sự ràng buộc gắn kết các sự kiện như vậy với toàn bộ hệ thống vũ tru, chúng được hình thành tùy thuộc vào các nguyên nhân cuối cùng hoặc vào sư ngẫu nhiên... Khi đó, chúng ta phải coi trạng thái hiện tại của vũ trụ như là kết quả của trạng thái trước đó và là nguyên nhân của trạng thái tiếp sau. Tại một thời điểm đã cho, một trí tuệ có thể thấu hiểu được tất cả các lực tác dụng trong tự nhiên và những trạng thái tương ứng của mọi thứ cấu tạo nên tự nhiên - một trí tuệ đủ lớn để có thể đưa những dữ liệu này vào phân tích - thì nó sẽ thâu tóm được trong cùng một công thức những chuyển động của các thiên thể lớn nhất trong vũ trụ cũng như những nguyên tử nhỏ bé nhất; đối với trí tuệ ấy thì không có gì là bất định và tương lai, cũng như quá khứ, sẽ chỉ là hiện tại trong mắt nó. Trí óc con người, trong sự hoàn hảo mà nó có thể mang lại cho thiên văn học, chỉ đưa ra được một ý niệm yếu ớt về trí tuệ này.

Nếu bạn muốn biết thì khi Laplace nói về cái "trí tuệ" tối thượng giả thuyết này, ông không hề ám chỉ tới Thượng đế. Không giống như Newton và Descartes, Laplace không phải là một người theo đạo. Khi được Laplace đưa tặng cuốn *Cơ học thiên thể*, Napoleon Bonaparte đã nhận xét: "Ông Laplace, người ta nói với ta là ông đã viết cuốn sách đồ sộ này về hệ thống

vũ trụ mà không hề nhắc đến người sáng tạo ra nó". Laplace ngay lập tức đáp lại: "Tâu bệ hạ, thần không cần dùng đến giả thiết đó". Napoleon đã thích thú kể với nhà toán học Joseph-Louis Lagrange về câu trả lời của Laplace, và ông này đã kêu lên: "Chà! Đó là một giả thiết tuyệt đẹp; nó giải thích được rất nhiều điều". Nhưng câu chuyện không kết thúc ở đó. Khi nghe về phản ứng của Lagrance, Laplace đã bình luận một cách lạnh nhạt rằng: "Thưa ngài, giả thiết đó đúng là giải thích được tất cả mọi thứ, nhưng nó không cho phép tiên đoán được bất kỳ điều gì. Là một học giả, tôi phải cung cấp cho ngài những công cụ cho phép đưa ra những tiên đoán".

Sự phát triển của cơ học lượng tử ở thế kỷ 20 - lý thuyết về thế giới hạ nguyên tử - đã chứng minh rằng kỳ vọng về một vũ trụ hoàn toàn tất định là quá ư lạc quan. Thực tế, vật lý học hiện đại đã chứng minh rằng không thể tiên đoán được kết cục của mọi thí nghiệm, thậm chí là chỉ về nguyên tắc. Mà thay vì, lý thuyết chỉ có thể tiên đoán được xác suất của các kết quả khác nhau. Tình hình trong khoa học xã hội thậm chí còn phức tạp hơn bởi vô số những yếu tố đan bện chằng chịt với nhau, mà nhiều yếu tố trong số đó còn vô cùng bất định. Các nhà nghiên cứu ở thế kỷ 17 đã nhận ra đủ sớm rằng việc tìm kiếm các nguyên lý xã hội phổ quát và chính xác kiểu như định luật hấp dẫn của Newton đã bị thất bại ngay từ đầu. Dường như khi tính phức tạp của bản chất con người được đưa vào các phương trình, thì những tiên đoán tin cậy gần như trở nên không thể. Tình hình thậm chí có vẻ như vô vọng hơn khi liên quan đến trí tuệ của toàn bộ dân chúng. Tuy nhiên, thay vì tuyệt vọng, một vài nhà tư tưởng thiên tài đã tạo ra một kho các công cụ toán học mới - đó là *lý thuyết xác suất* và *thống kê*.

Những tỷ lệ ngoài cái chết và thuế

Nhà tiểu thuyết người Anh Daniel Defoe (1660-1731), nổi tiếng nhất với câu chuyện phiêu lưu của ông về *Robinson Crusoe,* cũng là tác giả của cuốn sách về siêu nhiên nhan đề *Lịch sử chính trị của Quỷ*. Trong đó, Defoe, người đã nhìn thấy bằng chứng về những hành động của quỷ ở khắp mọi nơi, đã viết: "Những điều chắc chắn như tử vong và thuế, có thể tin được một cách vững chắc hơn". Benjamin Franklin (1706-90) dường như cũng tán thành quan điểm tương tự về khía cạnh chắc chắn. Trong một bức thư ông viết ở tuổi 83 cho nhà vật lý người Pháp Jean-Baptise Leroy, ông đã nói: "Hiến pháp của chúng tôi đang thực sự được thực hiện. Mọi điều dường như hứa hẹn rằng nó sẽ kéo dài mãi mãi; nhưng trong thế giới này, không gì có thể chắc chắn ngoài cái chết và thuế." Thực sự thì quãng đời của chúng ta dường như không thể tiên đoán được, có thể xảy ra thiên tai, dễ mắc sai lầm rất con người và bị ảnh hưởng bởi những tình huống hoàn toàn ngẫu nhiên. Những cụm từ như "[........] xảy ra" được chế ra để biểu thị một cách chính xác sự dễ tổn thương của chúng ta trước những điều không ngờ tới và sự không có khả năng kiểm soát may rủi của chúng ta. Mặc cho những trở ngại đó, và có thể thậm chí là vì những thách thức này mà các nhà toán học, khoa học xã hội và sinh học từ thế kỷ 16 đã dấn thân vào những nỗ lực nghiêm túc để giải quyết những vấn đề bất định một cách có phương pháp. Tiếp theo việc thiết lập nên lĩnh vực cơ học thống kê, và đối mặt với nhận thức rằng chính những nền tảng của vật lý học - dưới dạng cơ học lượng tử - lại dựa trên sự bất định, các nhà vật lý thế kỷ 20 và 21 đã hăng hái tham gia vào trận chiến này. Vũ khí mà các

nhà nghiên cứu sử dụng để chiến đấu với sự thiếu vắng quyết định luận chính xác là khả năng tính toán tỷ lệ (xác suất) của một kết cục cụ thể. Do không thể thực sự tiên đoán được một kết quả cụ thể, việc tính toán khả năng xuất hiện của những kết quả khác nhau là lựa chọn tốt nhất tiếp theo. Công cụ được tạo ra để cải thiện việc phỏng đoán đơn giản - đó là lý thuyết xác suất và thống kê - đã cung cấp một nền móng không chỉ của nhiều ngành khoa học hiện đại mà còn của cả một phạm vi rộng lớn các hoạt động xã hội, từ kinh tế học đến thể thao.

Chúng ta đều sử dụng xác suất và thống kê trong hầu như mọi quyết định của chúng ta thực hiện, đôi khi theo tiềm thức. Chẳng hạn, bạn có thể không biết rằng số lượng tử vong từ các tai nạn xe hơi ở Mỹ là 42.636 vụ vào năm 2004. Tuy nhiên, nếu con số đó là 3 triệu, thì tôi chắc chắn là bạn sẽ biết. Hơn nữa, sự hiểu biết này có thể khiến bạn phải nghĩ kỹ trước khi ngồi vào xe ôtô mỗi buổi sáng. Tại sao những dữ liệu chính xác về số lượng tử vong trên đường phố này lại cho chúng ta một sự tự tin nhất định trong việc quyết định lái xe của chúng ta? Như chúng ta sắp thấy dưới đây, một thành phần quan trọng đối với độ tin cậy của những số liệu này, đó là thực tế rằng chúng dựa trên những con số rất lớn. Số người chết ở Thị trấn Frio, Texas với dân số là 49 người vào năm 1969 thật khó mà có sức thuyết phục tương tự. Xác suất và thống kê nằm trong số những mũi tên quan trọng đối với chiếc cung của các nhà kinh tế, các cố vấn chính trị, nhà di truyền học, các công ty bảo hiểm, và bất kỳ ai muốn chắt lọc ra những kết luận có ý nghĩa từ một số lượng lớn các dữ liệu. Khi chúng ta nói về toán học đang lan truyền đến thậm chí những lĩnh vực mà ban đầu không ở dưới cái ô khoa học chính xác, thì nó thường đi vào qua các cửa sổ

mở ra bởi lý thuyết xác suất và thống kê. Vậy những lĩnh vực hiệu quả này đã được hình thành như thế nào?

Thống kê (*statistics*) - một thuật ngữ có nguồn gốc từ tiếng Ý *stato* (nhà nước) và *statista* (người giải quyết những công việc của nhà nước) - ban đầu hàm ý là sự thu thập đơn giản những sự kiện bởi các quan chức chính phủ. Công trình quan trọng đầu tiên về thống kê theo nghĩa hiện đại được thực hiện không phải bởi một nhà nghiên cứu chuyên nghiệp mà là một ông chủ cửa hiệu ở London thế kỷ 17. John Graunt (1620-74) được đào tạo để bán nút áo, kim khâu và rèm. Vì công việc này cho ông khá nhiều thời gian rảnh rỗi, Graunt đã tự học tiếng Latinh và tiếng Pháp và bắt đầu quan tâm đến Bảng yết thị tử vong - số lượng người chết hàng tuần từ các giáo xứ - được xuất bản ở London từ năm 1604. Quá trình phát hành các báo cáo này được thiết lập chủ yếu là để đưa ra một tín hiệu cảnh báo sớm về những dịch bệnh nguy hiểm. Sử dụng những số liệu thô đó, Graunt bắt đầu có những quan sát thú vị mà cuối cùng ông đã cho xuất bản một cuốn sách nhỏ 85 trang nhan đề *Những quan sát chính trị và tự nhiên đề cập đến trong danh mục kèm theo và dựa trên Bảng yết thị tử vong*. Hình 32 là ví dụ về một bảng thuộc cuốn sách của Graunt, trong đó không dưới 63 căn bệnh và thương vong được liệt kê theo thứ tự bảng chữ cái. Trong lời đề tặng vị Chủ tịch Hội Hoàng gia, Graunt đã chỉ ra rằng vì công trình của ông có liên quan đến "Không khí, Đất đai, Thời vụ, Sự màu mỡ, Sức khỏe, Bệnh tật, Tuổi thọ và Tỷ lệ giữa giới tính và tuổi tác của con người", nên nó thực sự là một chuyên luận về lịch sử tự nhiên. Thực sự thì Graunt đã không làm gì hơn là chỉ đơn giản thu thập và đưa ra số liệu. Chẳng hạn, bằng cách xem xét số lượng bình quân lễ rửa

(9)

The Diseases, and Casualties this year being 1632.

Abortive, and Stilborn	445
Affrighted	1
Aged	628
Ague	43
Apoplex, and Meagrom	17
Bit with a mad dog	1
Bleeding	3
Bloody flux, scowring, and flux	348
Brused, Issues, sores, and ulcers,	28
Burnt, and Scalded	5
Burst, and Rupture	9
Cancer, and Wolf	10
Canker	1
Childbed	171
Chrisomes, and Infants	2268
Cold, and Cough	55
Colick, Stone, and Strangury	56
Consumption	1797
Convulsion	241
Cut of the Stone	5
Dead in the street, and starved	6
Dropsie, and Swelling	267
Drowned	34
Executed, and prest to death	18
Falling Sicknes	7
Fever	1108
Fistula	13
Flocks, and small Pox	531
French Pox	12
Gangrene	5
Gout	4
Grief	11
Jaundies	43
Jawfaln	8
Impostume	74
Kil'd by several accidents	46
King's Evil	38
Lethargie	2
Livergrown	87
Lunatique	5
Made away themselves	15
Measles	80
Murthered	7
Over-laid, and starved at nurse	7
Palsie	25
Piles	1
Plague	8
Planet	13
Pleurisie, and Spleen	36
Purples, and spotted Feaver	38
Quinsie	7
Rising of the Lights	98
Sciatica	1
Scurvey, and Itch	9
Suddenly	62
Surfet	86
Swine Pox	6
Teeth	470
Thrush, and Sore mouth	40
Tympany	13
Tissick	34
Vomiting	1
Worms	27

Christened { Males — 4994, Females - 4590, In all — 9584 } Buried { Males — 4932, Females — 4603, In all — 9535 } Whereof, of the Plague — 8

Increased in the Burials in the 122 Parishes, and at the Pesthouse this year 993

Decreased of the Plague in the 122 Parishes, and at the Pesthouse this year. 266

C 7 In

Hình 32

tội và ma chay với cả đàn ông và đàn bà ở London và ở giáo xứ vùng nông thôn Romsey ở Hamshire, lần đầu tiên ông đã chứng minh được tính ổn định về tỷ lệ giới tính khi sinh. Đặc biệt là ông đã phát hiện ở London, cứ 13 trẻ em gái ra đời thì có 14 trẻ em trai và ở Ramsey là 15 trẻ em gái trên 16 trẻ em trai. Đáng kể hơn, Graunt đã nhìn thấy trước để nêu ra thắc mắc rằng "những khách du lịch sẽ hỏi liệu điều đó có xảy ra tương tự như vậy ở các quốc gia khác hay không". Ông cũng lưu ý rằng "đó là một sự may mắn cho loài người, bởi với tỷ lệ *đàn ông* cao hơn, thì đây chính là một rào cản tự nhiên cho *tục đa thê*: vì trong tình trạng mà phụ nữ không thể sống trong sự bình đẳng và ngang bằng về chi tiêu với chồng của mình, như hiện nay, thì ở đây họ cũng vậy". Ngày nay, tỷ lệ giả định chung giữa các bé trai và bé gái là vào khoảng 1,05. Theo truyền thống, người ta giải thích sự trội hơn về số lượng của con trai là do Mẹ tự nhiên đã sắp đặt có lợi cho con trai phần nào là bởi vì thai nhi và trẻ em trai thường yếu ớt hơn. Một cách tình cờ, vì lý do nào đó hoàn toàn không rõ, tỷ lệ các bé trai ở cả Mỹ và Nhật Bản đều giảm nhẹ mỗi năm kể từ những năm 1970.

Một nỗ lực tiên phong khác của Graunt đó là ý định xây dựng một phân bố theo độ tuổi đối với những người còn sống, bằng cách sử dụng dữ liệu về số lượng người chết tùy theo nguyên nhân. Điều này rõ ràng là có một tầm quan trọng to lớn về mặt chính trị, vì nó liên quan đến số người đi chiến đấu - những người ở độ tuổi từ 16 đến 56 - trong dân cư. Nói một cách nghiêm túc thì Graunt không có đủ thông tin để suy ra phân bố theo độ tuổi. Tuy nhiên, điều chính xác suy ra ở đây là ông đã chứng tỏ mình một người thông minh và có tư duy

sáng tạo. Dưới đây là mô tả của ông về cách xác định tỷ lệ tử vong ở trẻ em:

> Quan sát ban đầu của chúng tôi về số người tử vong cho thấy là, trong 20 năm, số trẻ em chết do các loại bệnh là 229.250, trong đó 71.124 chết vì đẹn, co giật, còi xương, bệnh về răng, và giun; và xảy thai, chết yểu, chương gan,... ; như vậy có thể nói 1/3 số trẻ em chết là do các bệnh tật nói trên, qua đó ta có thể dự đoán rằng chúng đều rơi vào trẻ em dưới 4 hoặc 5 tuổi. Số trẻ chết vì bệnh đậu mùa, bệnh đậu lợn và sởi, và giun mà không bị co giật là 12.210, mà chúng ta dự đoán tương tự là vào khoảng 1/2 là trẻ em dưới 6 tuổi. Giờ nếu chúng ta xem xét đến 16 ngàn trường hợp trong số 229 nghìn trẻ em chết vì lý do đặc biệt và số tử vong lớn vì dịch bệnh, thì chúng ta sẽ thấy khoảng 36% tất cả những trường hợp thụ thai đã chết trước 6 tuổi."

Nói cách khác, Graunt đã dự đoán tỷ lệ tử vong dưới 6 tuổi là (71.124 + 6.105) ÷ (229.250-16.000) = 0,36. Sử dụng lập luận tương tự và những phỏng đoán hợp lý, Graunt cũng đã ước tính được tỷ lệ tử vong của người già. Cuối cùng, ông đã lấp đầy khoảng cách từ 6 tuổi đến 76 tuổi bằng một giả thiết toán học về quan hệ giữa tỷ lệ tử vong với độ tuổi. Trong khi nhiều kết luận của Graunt không thực sự hợp lý, song nghiên cứu của ông đã khởi đầu cho khoa học thống kê như chúng ta biết hôm nay. Sự quan sát của ông cho thấy tỷ lệ phần trăm của một số sự kiện mà trước đó được xem là thuần túy có tính chất may rủi hay số mệnh (như cái chết gây ra bởi những loại bệnh tật khác nhau) thì thực tế lại có tính quy luật cực kỳ rõ ràng,

và chính điều đó đã đưa tư duy khoa học, định lượng vào các khoa học xã hội.

Những nhà nghiên cứu sau Graunt đã làm theo một số khía cạnh trong phương pháp luận của ông, đồng thời cũng phát triển sự hiểu biết toán học tốt hơn trong việc sử dụng thống kê. Có lẽ đáng ngạc nhiên là người có những cải tiến đáng kể nhất đối với bảng phân bố theo tuổi của Graunt lại là nhà thiên văn học Edmond Halley - chính là người đã thuyết phục Newton xuất bản cuốn *Principia*. Tại sao mọi người lại quan tâm đến bảng phân bố theo độ tuổi đến như vậy? Một phần có lẽ là vì điều này đã, và hiện vẫn còn là, cơ sở cho bảo hiểm nhân thọ. Các công ty bảo hiểm nhân thọ (và nhất là những kẻ đào mỏ, kết hôn vì tiền!) rất quan tâm đến câu hỏi đại loại như: Nếu một người sống đến 60 tuổi thì xác suất để ông ta hay bà ta sống được đến 80 tuổi là bao nhiêu?

Để xây dựng bảng phân bố theo độ tuổi của mình, Halley đã sử dụng những báo cáo chi tiết được lưu giữ tại thành phố Breslau ở Silesia từ cuối thế kỷ 16. Một mục sư địa phương ở Breslau, TS. Caspar Neumann, đã sử dụng danh sách này để dập tắt sự mê tín trong giáo xứ của mình cho rằng sức khỏe chịu ảnh hưởng bởi các pha của Mặt trăng hay bởi các tuổi chia hết cho 7 và 9. Cuối cùng, bài báo của Halley với cái tên khá dài "Ước tính tỷ lệ tử vong của loài người, dựa trên bảng kê các ca sinh nở và đám tang ở thành phố Breslaw; với nỗ lực nhằm xác định cái giá của niên khoản dành cho sinh mệnh", đã trở thành cơ sở cho toán học sử dụng trong bảo hiểm nhân thọ. Để có được ý niệm về việc các công ty bảo hiểm tính toán khoản dôi ra của họ ra sao, chúng ta hãy nghiên cứu bảng phân bố theo độ tuổi của Halley dưới đây:

Bảng phân bố theo độ tuổi của Halley

Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người
1	1000	11	653	21	592
2	855	12	646	22	586
3	798	13	640	23	579
4	760	14	634	24	573
5	732	15	628	25	567
6	710	16	622	26	560
7	692	17	616	27	553
8	680	18	610	28	546
9	670	19	604	29	539
10	661	20	598	30	531

Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người
31	523	41	436	51	335
32	515	42	427	52	324
54	507	43	417	53	313
34	499	44	407	54	302
35	490	45	397	55	292
36	481	46	387	56	282
37	472	47	377	57	272
38	463	48	367	58	262
39	454	49	357	59	252
40	445	50	346	60	242

Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người
61	232	71	131	81	34
62	222	72	120	82	28
63	212	73	109	83	23
64	202	74	98	84	20
65	192	75	88		
66	182	76	78		
67	172	77	68		
68	162	78	58		
69	152	79	49		
70	142	80	41		

Ví dụ, bảng trên cho thấy rằng có 710 trẻ em 6 tuổi còn sống, 346 ở độ tuổi 50. Người ta có thể lấy tỷ số 346/710 hay 0,49 làm ước tính xác suất để một em bé 6 tuổi có thể sẽ sống tới tuổi 50. Tương tự như vậy, trong số 242 người ở tuổi 60, thì 41 người vẫn còn sống ở tuổi 80. Tức là xác xuất để sống từ 60 đến 80 tuổi sẽ được ước tính bằng tỷ số 41/242 hay khoảng 0,17. Sự hợp lý phía sau quá trình này rất đơn giản. Nó dựa trên kinh nghiệm trong quá khứ để xác định xác suất của nhiều sự kiện tương lai khác nhau. Nếu mẫu mà kinh nghiệm dựa vào nó được khẳng định đủ lớn (bảng của Halley dựa trên con số khoảng 34.000 người), và nếu một số giả thiết là đúng (như tỷ lệ tử vong là hằng số theo thời gian), thì xác suất được tính là khá tin cậy. Dưới đây là những gì mà Jakob Bernoulli miêu tả về cùng một vấn đề:

> Tôi tự hỏi, cái chết nào có thể khẳng định số lượng bệnh tật, khi đếm tất cả các trường hợp khả dĩ, làm cho con người đau đớn ở mỗi một bộ phận trên cơ thể và ở mọi độ tuổi, và nói một căn bệnh này có thể chắc chắn gây chết người hơn căn bệnh khác bao nhiêu... và dựa trên cơ sở đó để dự đoán về mối quan hệ giữa cuộc sống và cái chết trong những thế hệ tương lai?

Sau khi kết luận điều này và những dự đoán tương tự "dựa trên những yếu tố hoàn toàn mơ hồ, và liên tục đánh lừa cảm giác của chúng ta bằng sự phức tạp vô tận trong mối quan hệ qua lại giữa chúng", Bernoulli cũng đưa ra một cách tiếp cận xác suất/thống kê:

> Tuy nhiên, có một cách khác dẫn chúng ta đến thứ mà chúng ta đang tìm kiếm và giúp chúng ta ít nhất cũng khẳng định được *cái hậu nghiệm*, cái mà chúng ta không thể xác định được một cách *tiên nghiệm*, tức là, khẳng định được nó qua những kết quả quan sát được ở vô số những ví dụ tương tự. Trong mối quan hệ như vậy thì phải thừa nhận rằng, dưới cùng những điều kiện như nhau, thì sự xuất hiện (hoặc không xuất hiện) của một sự kiện trong tương lai sẽ theo cùng kiểu như các sự kiện tương tự được quan sát trong quá khứ. Chẳng hạn, nếu bạn quan sát thấy rằng trong số 300 người ở cùng độ tuổi và với cùng thể chất như một anh chàng *Titius* nào đó, có 200 người chết trong vòng 10 năm trong khi số còn lại còn sống sót, thì chúng ta có thể kết luận với một độ chắc chắn hợp lý rằng vận rủi để Titius phải trả món nợ của mình cho tự nhiên trong

10 năm tiếp theo sẽ lớn hơn hai lần so với cơ may để anh ta sống sót vượt quá thời gian đó.

Halley tiếp tục những bài viết có tính chất toán học của mình về tỷ lệ tử vong với một nhận xét rất thú vị có phần hàm ý triết học nhiều hơn. Một trong những trang viết rất đặc biệt này:

> Bên cạnh những sử dụng mà tôi đã nói đến ở trên, việc suy ra từ các bảng tương tự có lẽ không phải là điều không thể chấp nhận được, sẽ thật là không đúng khi chúng ta bực bội vì cuộc sống của chúng ta ngắn ngủi, và cho rằng bản thân mình đã làm điều gì đó sai trái nếu không sống được đến lúc tuổi già; trong khi ở đây dường như một nửa số người được sinh ra chết trong độ tuổi 17, 1238 người khi đó giảm xuống chỉ còn 616 người. Như vậy, thay vì than phiền cái mà chúng ta gọi là Chết không đúng lúc, chúng ta phải phục tùng cái chết đó với sự kiên nhẫn và bình thản, đó là điều kiện cần của những vật liệu có thể chết của chúng ta, và của cấu trúc và thành phần tốt đẹp nhưng yếu ớt của chúng ta: và việc chúng ta tồn tại, có lẽ trong nhiều năm, là một điều sung sướng, một quãng đời mà một nửa loài người không thể đi đến.

Trong tình hình mà nhiều điều trong thế giới hiện đại đã tiến bộ đáng kể so với thống kê đáng buồn của Halley thì điều này không may lại là không đúng cho mọi quốc gia. Ở Zambia chẳng hạn, tỷ lệ tử vong ở độ tuổi lên 5 và dưới 5 vào năm 2006 được ước tính là 182 trên 1.000, một con số thật sửng sốt. Tuổi thọ trung bình ở Zambia vẫn ở mức thấp đến đau lòng là 37 tuổi.

Tuy nhiên, thống kê không chỉ liên quan đến cái chết. Nó còn thâm nhập vào mọi khía cạnh cuộc sống con người, từ những đặc điểm vật lý đơn giản đến những sản phẩm trí tuệ. Một trong những người đầu tiên nhận thấy sức mạnh của thống kê trong việc tạo ra "các quy luật" tiềm năng cho khoa học xã hội là nhà thống thái người Bỉ Lambert-Adolphe-Jacques Quetelet (1796-1874). Ông, hơn bất kỳ người nào khác, là người đã đưa vào khái niệm thống kê phổ biến "người chuẩn".

Người chuẩn

Adolphe Quetelet sinh ngày 22 tháng 2 năm 1796 tại thị trấn cổ Ghent nước Bỉ. Cha ông, một công chức của thị trấn, mất khi Adolphe mới 7 tuổi. Buộc phải tự kiếm sống từ khi còn trẻ, Quetelet bắt đầu dạy toán khi mới 17 tuổi. Khi không phải đi dạy, ông sáng tác thơ, soạn lời nhạc kịch, tham gia viết hai vở kịch và dịch một vài tác phẩm văn học. Dù vậy, chủ đề ưa thích của ông vẫn là toán học và ông là người đầu tiên tốt nghiệp với tấm bằng tiến sĩ khoa học từ trường Đại học Ghent. Vào năm 1820, Quetelet được bầu làm viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Bỉ và trong một thời gian ngắn, ông đã trở thành một thành viên tích cực nhất của Viện. Những năm sau đó, ông chủ yếu dành cho công việc giảng dạy và xuất bản một số chuyên luận về toán học, vật lý và thiên văn học.

Quetelet thường mở đầu cho bài giảng của mình về lịch sử khoa học bằng một nhận xét rất tinh tế sau: "Khoa học càng phát triển thì chúng càng có xu hướng tiến sâu vào lĩnh vực toán học, một loại tâm điểm mà các khoa học đều hội tụ về.

Chúng ta có thể đánh giá về mức độ hoàn hảo mà một bộ môn khoa học đạt tới thông qua mức độ tiếp cận của môn khoa học ấy với những tính toán toán học".

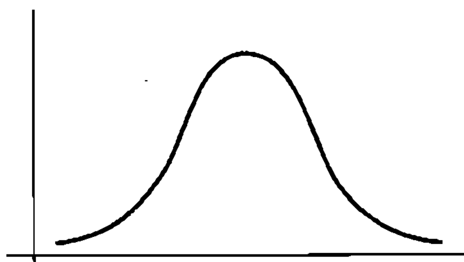
Vào tháng 12 năm 1823, Quetelet được gửi sang Paris bằng nguồn ngân sách nhà nước, chủ yếu là để nghiên cứu các kỹ thuật quan sát trong thiên văn học. Tuy nhiên, hóa ra ba tháng tới thăm thủ đô toán học của thế giới đã chuyển Quetelet sang một hướng hoàn toàn khác - lý thuyết xác suất. Người có vai trò chủ yếu nhất gợi nên hứng thú nhiệt tình của Quetelet đối với đề tài này chính là Laplace. Quetelet sau này đã tóm tắt lại kinh nghiệm của ông với thống kê và xác suất:

> May rủi, một từ bí ẩn, bị lạm dụng quá nhiều, nên cần được xem chỉ như là một tấm mạng che đậy sự ngu dốt của chúng ta; nó là một bóng ma làm nhiễu loạn cái đế chế tuyệt đối nhất đối với lương tri, vốn chỉ quen xem xét các sự kiện một cách cô lập, nhưng lại là hoàn toàn vô nghĩa trước nhà triết học, người có con mắt bao quát cả một chuỗi dài các sự kiện và sự thấu thị của anh ta không để cho những biến đổi làm cho lạc lối, và những biến đổi này sẽ biến mất khi người đó cho mình một góc nhìn đủ để nắm bắt được các quy luật của tự nhiên.

Tầm quan trọng của kết luận này không phải là chuyện được phóng đại lên. Quetelet về căn bản đã phủ nhận vai trò của may rủi và thay nó bằng suy luận táo bạo (thậm chí mặc dù còn hoàn toàn chưa được chứng minh) cho rằng ngay cả các hiện tượng xã hội cũng có những nguyên nhân và rằng tính quy

luật bộc lộ từ những kết quả thống kê có thể được sử dụng để phát hiện những quy tắc nằm bên dưới trật tự xã hội.

Trong một nỗ lực thử nghiệm cách tiếp cận thống kê của mình, Quetelet đã bắt đầu một dự án khá tham vọng là tập hợp hàng ngàn những phép đo có liên quan đến cơ thể con người. Chẳng hạn, ông đã nghiên cứu phân bố số đo vòng ngực của 5.738 binh lính Scotland và chiều cao của 100.000 người đến tuổi đi lính của Pháp bằng cách vẽ đồ thị một cách riêng rẽ tần suất xuất hiện mỗi một đặc tính của con người. Nói cách khác, ông đã biểu diễn bằng đồ thị có bao nhiêu người lính, chẳng hạn, có chiều cao nằm giữa 1m50 đến 1m58, sau đó là giữa 1m58 đến 1m64, và cứ tiếp tục như vậy. Sau đó, ông còn dựng những đường cong tương tự ngay cả với những cái mà ông gọi là đặc tính "đạo đức" mà ông đã có đủ dữ liệu. Các đại lượng "đạo đức đó" bao gồm tự tử, hôn nhân và xu hướng phạm tội. Trước sự kinh ngạc của chính mình, Quetelet đã khám phá ra rằng tất cả những đặc tính của con người đều tuân theo cái mà ngày nay gọi là phân bố *chuẩn*, một phân bố tần suất có dạng hình chuông (hay còn gọi là phân bố *Gauss*, theo tên "hoàng tử toán học" Carl Friedrich Gauss, một tên gọi phần nào không được đúng lắm), (H. 33). Dù là chiều cao, cân nặng, số đo độ dài các chi, hay thậm chí cả các phẩm chất về trí tuệ được xác định bởi cái mà sau này là những trắc nghiệm tâm lý tiên phong, thì vẫn cùng một loại đường cong phân bố chuẩn xuất hiện lặp đi lặp lại trong tất cả các trường hợp đó. Bản thân đường cong này không phải là mới với Quetelet, vì các nhà toán học và vật lý học đã phát hiện ra nó từ giữa thế kỷ 18 và Quetelet đã quá quen thuộc với nó từ công việc thiên văn của mình, mà cái phần nào gây sốc ở đây là sự liên đới giữa đường cong này với các



Hình 33

đặc tính của con người. Trước kia, đường cong này được biết tới là *đường cong sai số*, bởi nó thường xuất hiện trong bất cứ loại sai số nào trong quá trình đo đạc.

Chẳng hạn, hãy hình dung bạn muốn đo chính xác nhiệt độ của một chất lỏng trong một cái bình. Bạn có thể sử dụng nhiệt kế có độ chính xác cao và trong khoảng thời gian một giờ đồng hồ, bạn đọc nhiệt kế liên tục 1000 lần. Bạn sẽ thấy rằng vì những sai số ngẫu nhiên và có thể do một số thăng giáng về nhiệt độ mà không phải mọi lần đo đều cho chính xác cùng một giá trị. Thực tế, các số đo có xu hướng cụm lại xung quanh một giá trị trung tâm, với một số lần đo cho nhiệt độ cao hơn và một số lần khác cho giá trị thấp hơn. Và nếu bạn vẽ đồ thị biểu diễn số lần mà một giá trị đo xuất hiện theo giá trị của nhiệt độ, thì bạn sẽ thu được một đường cong hình chuông như là Quetelet đã tìm thấy đối với các đặc tính của con người. Trong thực tế, số lần đo thực hiện trên bất kỳ đại lượng vật lý nào càng lớn thì sự phân bố tần suất thu được càng gần với đường cong chuẩn. Hệ quả trực tiếp của thực tế này đối với câu hỏi về tính hiệu quả đến phi lý của toán học là

rất ấn tượng - ngay cả những sai số của con người cũng tuân theo một số quy tắc toán học chặt chẽ.

Quetelet cho rằng kết luận này thậm chí còn có ảnh hưởng sâu rộng hơn nữa. Ông xem việc phát hiện ra rằng các đặc tính của con người tuân theo đường cong sai số là một chỉ dấu cho thấy "người chuẩn" trong thực tế chính là loại mà tự nhiên cố gắng tạo ra. Theo Quetelet, cũng giống như sai số trong sản xuất tạo ra sự phân bố độ dài của các cái đinh xung quanh độ dài trung bình (đúng), sai số của tự nhiên cũng được phân bố xung quanh một loại sinh học được ưu tiên. Ông tuyên bố rằng người dân của một quốc gia thường cụm lại xung quanh người chuẩn (hay trung bình) của họ "cứ như thể họ là kết quả của những phép đo thực hiện trên một và chỉ một người, nhưng bằng các dụng cụ quá cồng kềnh đủ để đánh giá được sự thay đổi về kích thước".

Rõ ràng là những tư biện của Quetelet đã đi hơi quá xa. Đành rằng khám phá của ông cho thấy những đặc tính sinh học (dù là thể chất hay tinh thần) được phân bố theo đường cong tần suất chuẩn là cực kỳ quan trọng, song điều này không thể được xem là bằng chứng cho những ý định của tự nhiên cũng như những biến thiên của các cá thể không thể được xem chỉ như là những sai sót đơn thuần. Chẳng hạn, Quetelet đã phát hiện ra rằng chiều cao trung bình của những người ở độ tuổi đăng lính của Pháp là 1m64. Tuy nhiên, ở đầu thấp, ông lại phát hiện một người cao có 0,45m. Rõ ràng là không thể có chuyện phạm sai số tới gần 1m2 khi đo chiều cao của một người cao 1m64.

Ngay cả khi chúng ta bỏ qua ý niệm của Quetelet về "quy luật" tạo nên con người từ một khuôn mẫu duy nhất, thì bản thân thực tế rằng những phân bố của rất nhiều đặc tính từ cân

nặng cho đến chỉ số IQ tất cả đều tuân theo đường cong chuẩn đã là điều khá kỳ lạ rồi. Và nếu như thế vẫn còn chưa đủ, thì ngay cả sự phân bố của bình quân các cú đánh bóng chày của giải Major-League cũng khá phù hợp với phân bố chuẩn, cũng như tỷ suất lợi nhuận thường niên về chỉ số chứng khoán (được cấu thành từ nhiều loại chứng khoán đơn lẻ). Và thực tế, những phân bố lệch khỏi đường cong chuẩn đôi khi đòi hỏi phải được xem xét lại một cách thận trọng. Chẳng hạn, nếu sự phân bố điểm môn Tiếng Anh tại một trường nào đó được phát hiện không phải là chuẩn, thì điều này buộc sẽ phải có một cuộc thanh tra thực tiễn chấm điểm tại trường học đó. Điều này không có nghĩa là mọi phân bố đều phải là chuẩn. Sự phân bố độ dài các từ mà Shakespear sử dụng trong các vở kịch của ông không phải là chuẩn. Ông sử dụng các từ có 3 và 4 chữ cái nhiều hơn các từ có 11 hay 12 chữ cái. Thu nhập hộ gia đình thường niên ở Mỹ cũng cho thấy một sự phân bố không chuẩn. Ví dụ như năm 2006, 6,37% các hộ gia đình hàng đầu kiếm được khoảng 1/3 tổng thu nhập. Thực tế này làm nảy sinh một câu hỏi rất thú vị: nếu các đặc tính cả về thể chất lẫn tinh thần của con người (được cho là quyết định đến tiềm năng thu nhập) đều tuân theo phân bố chuẩn, vậy tại sao thu nhập lại không? Tuy nhiên, trả lời cho những câu hỏi kinh tế-xã hội kiểu như vậy vượt ra ngoài phạm vi của cuốn sách này. Từ góc độ giới hạn này của chúng tôi, thì thực tế đáng kinh ngạc là, về căn bản, mọi đặc điểm về thể chất có thể đo được của con người, hay động vật và thực vật (thuộc một tập hợp đã cho bất kỳ) đều được phân bố theo chỉ một loại hàm số toán học.

Các đặc trưng của con người về mặt lịch sử không chỉ là cơ sở cho việc nghiên cứu sự phân bố tần suất thống kê mà còn cho

việc thiết lập một khái niệm toán học là *sự tương quan*. Tương quan đo mức độ mà những biến đổi trong giá trị của một biến (số) được kèm theo những thay đổi của một biến khác. Chẳng hạn, những phụ nữ cao hơn được kỳ vọng là sẽ đi giày số lớn hơn. Tương tự như vậy, các nhà tâm lý học đã phát hiện ra sự tương quan giữa trí thông minh của cha mẹ với mức độ thành công của con cái họ ở trường.

Khái niệm tương quan trở nên đặc biệt hữu dụng ở những tình huống mà trong đó không có sự phụ thuộc hàm số thực sự giữa hai biến số. Ví dụ, hãy hình dung một biến số là nhiệt độ ban ngày cực đại ở nam Arizona và biến số khác là số các đám cháy rừng ở vùng đó. Với giá trị đã cho của nhiệt độ, người ta không thể dự đoán được một cách chính xác số các vụ cháy rừng sẽ xảy ra, vì biến số thứ hai còn phụ thuộc vào các biến số khác như độ ẩm và số đám cháy do con người gây nên. Nói cách khác, với bất kỳ giá trị nhiệt độ nào thì có thể có nhiều số lượng đám cháy rừng tương ứng và ngược lại. Vì vậy, khái niệm toán học được gọi là *hệ số tương quan* cho phép chúng ta đo được một cách định lượng độ mạnh yếu của mối quan hệ giữa hai biến số kiểu như vậy.

Người đầu tiên đưa ra công cụ hệ số tương quan lại là một nhà địa lý, nhà khí tượng, nhà nhân chủng học và thống kê thời Victoria, Ngài Francis Galton (1822-1911) - anh em họ với Charles Darwin - chứ không phải là một nhà toán học chuyên nghiệp. Là một người có đầu óc cực kỳ thực tế, ông thường dành sự nâng cấp toán học tinh tế những khái niệm cách tân của mình cho các nhà toán học khác, mà đặc biệt là nhà thống kê Karl Pearson (1857-1936). Dưới đây là sự giải thích của Galton về khái niệm tương quan:

> Độ dài của cubit [cẳng tay] có tương quan với vóc người, vì một cẳng tay dài thường là của người cao. Nếu sự tương quan giữa hai thứ này là rất chặt chẽ thì một cẳng tay rất dài sẽ thường là của người có tầm vóc rất cao, nhưng nếu tương quan đó là không thật chặt chẽ, thì một cẳng tay rất dài, về trung bình, sẽ gắn với người chỉ có tầm vóc cao, chứ không phải là rất cao; trong khi đó, nếu sự tương quan này bằng 0 thì một cẳng tay rất dài sẽ gắn với một người có tầm vóc không có gì đặc biệt và vì vậy, về trung bình, chỉ là người tầm thước.

Pearson cuối cùng đã đưa ra được một định nghĩa toán học chính xác của hệ số tương quan. Hệ số này được định nghĩa theo cách sao cho khi sự tương quan là rất chặt chẽ - tức là khi một biến số này thay đổi theo sát với xu hướng tăng giảm của biến số kia - thì hệ số này có giá trị là 1. Khi hai đại lượng là *phản tương quan*, có nghĩa là khi biến số này tăng thì biến số kia giảm và ngược lại, thì hệ số tương quan bằng -1. Còn hai biến số mà biến này hành xử như thể biến kia không tồn tại thì có hệ số tương quan bằng 0. (Chẳng hạn, hành vi của một số chính phủ không may lại có hệ số tương quan bằng không với nguyện vọng của người dân mà họ được coi là đại diện).

Nghiên cứu y học hiện đại và dự báo kinh tế chủ yếu dựa trên sự nhận dạng và tính toán các tương quan. Mối quan hệ giữa hút thuốc và ung thư phổi, và giữa phơi nắng và ung thư da, chẳng hạn, ban đầu được thiết lập là nhờ phát hiện và đánh giá các tương quan. Các nhà phân tích thị trường chứng khoán liên tục cố gắng tìm kiếm và định lượng các tương quan giữa

hành vi thị trường và các biến số khác; bất kỳ một phát hiện nào như vậy đều có thể tạo ra lợi nhuận rất lớn.

Như một số nhà thống kê đầu tiên đã nhận thấy, cả việc thu thập dữ liệu thống kê lẫn việc giải thích chúng đều có thể rất lắt léo và phải được xử lý vô cùng thận trọng. Một người đánh cá sử dụng tấm lưới có các mắt rộng 10 insơ rất hay có thiên hướng kết luận rằng mọi con cá đều lớn hơn 10 insơ, đơn giản chỉ bởi vì những con nhỏ hơn đã thoát ra khỏi lưới của anh ta. Đây là một ví dụ về *hiệu ứng chọn lọc* - những thiên vị được đưa vào kết quả hoặc là do công cụ được sử dụng để thu thập dữ liệu hoặc do phương pháp luận được sử dụng để phân tích chúng. Việc lấy mẫu cũng đặt ra một vấn đề khác. Chẳng hạn, các cuộc thăm dò dư luận ngày nay thường phỏng vấn không nhiều hơn vài ba ngàn người. Vậy thì làm thế nào mà những người thăm dò có thể đảm bảo chắc chắn rằng quan điểm của những người tham gia cuộc thăm dò này là đại diện một cách chính xác cho quan điểm của hàng trăm triệu người? Một điểm khác cần phải ý thức là sự tương quan không nhất thiết có hàm ý là nguyên nhân. Doanh số bán các máy nướng bánh mì lát loại mới có thể tăng đồng thời với sự tăng số khán giả của các buổi hòa nhạc cổ điển, nhưng điều này không có nghĩa là sự hiện diện trong nhà một máy nướng bánh mì lát loại mới đã làm tăng sự tán thưởng âm nhạc. Đúng hơn là cả hai kết quả này đều có thể là do sự cải thiện của nền kinh tế.

Bất chấp những cảnh báo quan trọng này, thống kê đã trở thành một trong những công cụ hiệu quả nhất trong xã hội hiện đại, thực sự đem "khoa học" vào các khoa học xã hội. Nhưng tại sao thống kê lại làm được như vậy? Câu trả lời được đưa ra bởi môn toán học *xác suất* đã thống trị nhiều mặt của

đời sống hiện đại. Các kỹ sư khi đang cân nhắc để quyết định xem nên cài đặt cơ cấu an toàn nào vào CEV (*Crew Exploration Vehicle* - tàu vũ trụ có người) cho các nhà du hành vũ trụ, các nhà vật lý hạt đang phân tích những kết quả thu được trong các thí nghiệm trên máy gia tốc, các nhà tâm lý đang đánh giá các bài trắc nghiệm IQ cho trẻ em, các công ty dược phẩm đang đánh giá hiệu quả của các loại thuốc mới, và các nhà di truyền học đang nghiên cứu tính di truyền của con người, tất cả họ đều phải sử dụng lý thuyết xác suất.

Trò chơi may rủi

Nghiên cứu về xác suất một cách nghiêm túc đã bắt đầu từ những xuất phát điểm rất khiêm tốn - đó là nỗ lực của những kẻ chơi đỏ đen tìm cách đặt cược thế nào cho chắn ăn. Đặc biệt là vào giữa thế kỷ 17, một nhà quý tộc người Pháp tên là Chevalier de Méré, một tay cờ bạc khét tiếng, đã đặt ra một loạt các câu hỏi về trò đánh bạc cho nhà toán học và triết gia nổi tiếng người Pháp là Blaise Pascal (1623-62). Vào năm 1654, Pascal đã trao đổi thư từ về những câu hỏi này với một nhà toán học Pháp vĩ đại khác vào thời đó là Pierre de Fermat (1601-65). Và lý thuyết xác suất cuối cùng đã ra đời từ sự trao đổi thư từ này.

Hãy xét một trong những ví dụ hấp dẫn được Pascal đề cập đến trong bức thư đề ngày 29 tháng 7 năm 1654. Giả sử có hai nhà quý tộc cùng chơi trò gieo một con xúc xắc. Mỗi người chơi đặt lên bàn 32 đồng tiền vàng. Người chơi thứ nhất chọn số 1 và người chơi thứ hai chọn số 5. Mỗi lần con số mà một người

chơi đã chọn xuất hiện, thì người chơi đó nhận được một điểm. Người thắng là người đầu tiên có được ba điểm. Tuy nhiên, giả sử rằng sau khi trò chơi đã diễn ra được một lúc, số 1 xuất hiện hai lần (do đó người chơi đã chọn số 1 được hai điểm), trong khi số 5 chỉ xuất hiện một lần (tức người kia chỉ được một điểm). Nếu, vì một lý do nào đó, trò chơi bị dừng lại vào lúc này, thì 64 đồng tiền vàng sẽ được chia cho hai người chơi như thế nào cho hợp lý? Pascal và Fermat đã tìm ra câu trả lời rất lôgic về mặt toán học. Nếu người chơi đã có hai điểm mà thắng trong lần gieo xúc xắc tiếp theo thì toàn bộ số tiền vàng sẽ thuộc về anh ta. Còn nếu người kia thắng trong lần gieo tiếp theo thì mỗi người chơi đều có hai điểm và vì vậy mỗi người sẽ nhận 32 đồng tiền vàng. Vì vậy, nếu hai người chơi dừng không gieo xúc xắc tiếp nữa thì người chơi thứ nhất có thể biện luận một cách đúng đắn như sau: "Tôi chắc chắn sẽ có 32 đồng tiền vàng ngay cả nếu tôi thua lần gieo xúc xắc tiếp theo, còn 32 đồng tiền còn lại có thể tôi được và cũng có thể anh được; cơ hội là ngang nhau. Vì vậy, hãy chia 32 đồng vàng này đều nhau và đưa cho tôi cả 32 đồng vàng mà tôi đã chắc chắn có được". Nói cách khác, người chơi thứ nhất sẽ được 48 đồng tiền vàng và người kia được 16 đồng. Không thể tin được rằng một nguyên lý toán học mới và sâu sắc lại có thể nảy sinh từ một kiểu trao đổi bề ngoài quả là rất tầm thường này. Tuy nhiên, đây chính xác là lý do tại sao tính hiệu quả của toán học lại cao đến mức "phi lý" và bí ẩn như vậy.

Bản chất của lý thuyết xác suất có thể được soi sáng từ những thực tế đơn giản sau đây. Không ai có thể dự đoán được một cách chắc chắn một đồng xu tung lên cao sẽ rơi xuống là sấp hay ngửa. Ngay cả nếu đồng xu là ngửa suốt 10 lần liền thì điều

đó cũng không cải thiện được mảy may nào khả năng phán đoán của chúng ta với lần tung đồng xu tiếp theo. Tuy nhiên, chúng ta có thể dự đoán chắc chắn rằng nếu bạn tung đồng xu đó 10 triệu lần thì gần một nửa sẽ cho mặt ngửa và gần một nửa cho mặt sấp. Thực tế, vào cuối thế kỷ 19, nhà thống kê Karl Pearson đã kiên nhẫn tung đồng xu 24.000 lần. Và ông đã nhận được 12.012 lần mặt ngửa. Theo một nghĩa nào đó, thì đây chính là bản chất của lý thuyết xác suất. Lý thuyết xác suất cho chúng ta những thông tin chính xác về tập hợp những kết quả của một số lượng lớn các thí nghiệm; nhưng nó không bao giờ có thể tiên đoán được kết quả của một thí nghiệm cụ thể nào. Nếu một thí nghiệm có thể cho *n* kết quả khả dĩ, thì mỗi kết quả đều có cơ hội xảy ra như nhau, và vì thế xác suất cho mỗi kết quả là 1/*n*. Nếu bạn gieo một con xúc xắc, thì xác suất có được mặt số 4 là 1/6, vì một con xúc xắc có 6 mặt và mỗi mặt đều là một kết cục khả dĩ như nhau. Giả sử bạn gieo con xúc xắc bảy lần liên tiếp và mỗi lần bạn đều nhận được mặt 4, thì xác suất nhận được mặt 4 ở lần gieo tiếp theo sẽ là bao nhiêu? Lý thuyết xác suất cho một câu trả lời rất rõ ràng: xác suất ấy vẫn là 1/6 - con xúc xắc không có bộ nhớ và mọi ý niệm về một "bàn tay nóng" hay về lần gieo tiếp theo tạo nên sự mất cân bằng trước đó chỉ là huyền thoại. Điều thực sự đúng ở đây là: nếu bạn tung con xúc xắc một triệu lần thì các kết quả sẽ quân bình và mặt 4 sẽ xuất hiện gần 1/6 số lần gieo.

Bây giờ chúng ta hãy xem xét một tình huống phức tạp hơn một chút. Giả sử rằng bạn tung ba đồng xu cùng một lúc. Xác suất để có hai đồng sấp và một đồng ngửa là bao nhiêu? Chúng ta có thể tìm ra câu trả lời một cách đơn giản bằng việc liệt kê tất cả các kết cục có thể có. Nếu ký hiệu mặt ngửa là "H"

và mặt sấp là "T" thì có 8 kết cục khả dĩ như sau: TTT, TTH, THT, THH, HTT, HTH, HHT, HHH. Trong số này, bạn có thể tìm thấy ba trường hợp thỏa mãn yêu cầu "hai đồng sấp và một đồng ngửa". Như vậy, xác suất cho sự kiện này là 3/8. Hay tổng quát hơn, nếu trong số *n* kết cục có cơ hội ngang nhau, và có *m* kết cục thỏa mãn yêu cầu mà bạn đòi hỏi thì xác suất để sự kiện đó xảy ra là *m/n*. Lưu ý rằng điều này có nghĩa là xác suất luôn nhận giá trị giữa 0 và 1. Nếu sự kiện mà bạn quan tâm trong thực tế là không thể xảy ra thì *m* = 0 (không có kết cục nào thỏa mãn) và xác suất bằng 0. Mặt khác, nếu sự kiện là tuyệt đối chắc chắn, tức là tất cả *n* sự kiện đều thỏa mãn (*m* = *n*) thì xác suất khi đó đơn giản là *n/n* = 1. Các kết cục của việc tung ba đồng xu chứng minh một hệ quả quan trọng khác của lý thuyết xác suất - nếu bạn có một số sự kiện hoàn toàn *độc lập* với nhau, thì xác suất để tất cả các sự kiện đó đồng thời xảy ra bằng tích của các xác suất riêng lẻ. Ví dụ, xác suất của ba đồng xu đều ngửa là 1/8, bằng tích của ba xác suất để nhận được mặt ngửa của mỗi đồng xu: 1/2 × 1/2 × 1/2 = 1/8.

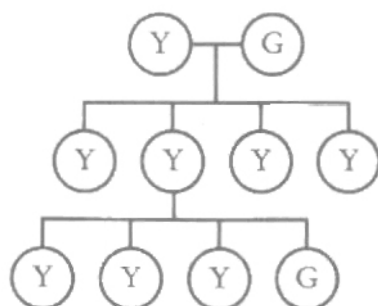
OK, bạn có thể nghĩ ngoài các trò chơi trong sòng bạc và các hoạt động cờ bạc khác, thì chúng ta có thể sử dụng những khái niệm xác suất rất cơ bản này vào việc gì nữa không? Bất kể bạn có tin hay không thì tùy nhưng các quy luật xác suất tưởng như không quan trọng lắm này lại là tâm điểm của những nghiên cứu hiện đại về di truyền học - khoa học nghiên cứu về sự kế thừa các đặc tính sinh học.

Người đưa xác suất vào di truyền học là một linh mục xứ Moravia. Gregor Mendel (1822-84) sinh ra tại một ngôi làng gần biên giới Moravia với Silesia (nay là Hynčice thuộc Cộng hòa Séc). Sau khi vào học ở Tu viện St. Thomas thuộc dòng

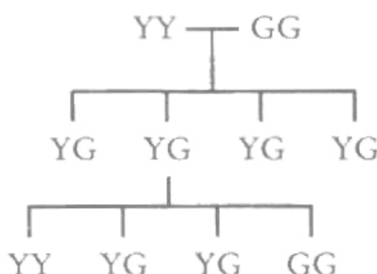
Augustine ở Brno, ông đã theo học về động vật học, thực vật học, vật lý học và hóa học tại Đại học Vienna. Trở lại Brno, ông bắt đầu tiến hành thực nghiệm ráo riết với cây đậu Hòa lan, với sự hỗ trợ mạnh mẽ từ phía cha tu viện trưởng của tu viện St. Thomas. Mendel tập trung nghiên cứu vào cây đậu vì chúng dễ mọc và cũng vì chúng mang trên mình cả cơ quan sinh sản đực và cái. Vì vậy cây đậu có thể tự thụ phấn hoặc thụ phấn lai với cây khác. Bằng việc thụ phấn lai các cây chỉ cho các hạt màu xanh (G) với cây chỉ cho các hạt màu vàng (Y), Mendel đã thu được kết quả mà mới thoạt nhìn có vẻ rất rối rắm (H. 34). Lứa thế hệ đầu tiên chỉ cho các hạt màu vàng. Tuy nhiên, thế hệ thứ hai lại cho tỉ lệ nhất quán vàng trên xanh là 3:1! Từ kết quả đáng ngạc nhiên này, Mendel đã suy ra ba kết luận mà sau này đã trở thành một dấu mốc lịch sử quan trọng trong ngành di truyền học:

1. Sự kế thừa của một đặc tính liên quan đến sự truyền lại một số "nhân tố" (cái mà ngày nay chúng ta gọi là *gen*) từ bố mẹ sang các con.
2. Mỗi con đều kế thừa một "nhân tố" như vậy từ bố hoặc mẹ (đối với một tính trạng bất kỳ).
3. Một đặc tính đã cho có thể không biểu lộ ở con cái nhưng nó vẫn có thể được truyền tiếp cho thế hệ sau.

Nhưng làm thế nào có thể giải thích được các kết quả định lượng ở thí nghiệm của Mendel? Mendel lý giải rằng mỗi cây bố mẹ phải có hai "nhân tố" giống hệt nhau (cái mà ngày nay chúng ta gọi là *allele*, hai thành phần của một gien), hoặc là cùng vàng hoặc là cùng xanh (như hình 35). Khi hai cây lai tạo



Hình 34



Hình 35

với nhau, mỗi con sẽ thừa hưởng hai allele khác nhau, một allele từ bố và một allele từ mẹ (theo quy tắc 2 ở trên). Như vậy mỗi hạt ở cây con sẽ chứa một allele màu vàng và một allele màu xanh. Vậy tại sao các cây đậu ở thế hệ này lại toàn màu vàng? Mendel giải thích rằng, vì màu vàng là màu trội và nó che đi sự hiện diện của allele màu xanh ở thế hệ này (quy tắc 3). Tuy nhiên, (vẫn theo quy tắc 3), màu vàng không ngăn cản được màu xanh lặn được truyền đến thế hệ tiếp theo. Trong vòng lai tạo tiếp theo, mỗi cây đậu chứa một allele màu vàng và một allele màu xanh được thụ phấn với một cây khác có cùng tổ hợp các allele tương tự. Vì các con nhận một allele từ bố và một alele

từ mẹ, nên các hạt của thế hệ tiếp theo có thể chứa một trong các tổ hợp sau (hình 35): xanh-xanh, xanh-vàng, vàng-xanh hoặc vàng-vàng. Tất cả các hạt có allele vàng đều trở thành đậu vàng, vì vàng là trội. Vì vậy, do tất cả các tổ hợp allele là chắc chắn như nhau, nên tỷ lệ giữa đậu vàng và xanh phải là 3:1.

Bạn có thể nhận thấy rằng toàn bộ thí nghiệm của Mendel về thực chất giống hệt như thí nghiệm tung hai đồng xu. Gán mặt ngửa là màu xanh và sấp là màu vàng và việc hỏi tỷ phần các hạt đậu màu vàng (với màu vàng là trội trong việc quyết định màu sắc) thì cũng chẳng khác gì việc hỏi xác suất để có được ít nhất một mặt sấp khi tung hai đồng xu. Rõ ràng là 3/4, vì ba trong số các kết cục có thể (sấp-sấp, sấp-ngửa, ngửa-sấp và ngửa-ngửa) đều có một mặt sấp. Điều đó có nghĩa là tỷ lệ giữa số lần tung có chứa ít nhất một mặt sấp với số lần tung không có mặt sấp nào (trong rất nhiều lần tung) là 3:1, đúng như trong thí nghiệm của Mendel.

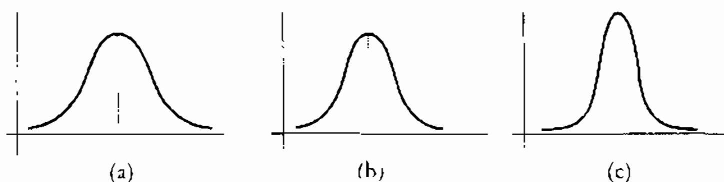
Bất chấp thực tế là Mendel đã cho công bố bài báo của mình nhan đề "Thí nghiệm lai giống cây" vào năm 1865 (và ông cũng đã giới thiệu các kết quả này tại hai hội nghị khoa học), song công trình của ông không được công luận chú ý cho mãi đến khi nó được phát hiện vào đầu thế kỷ 20. Mặc dù có một số nghi vấn liên quan đến tính chính xác trong các kết quả của ông, nhưng ông vẫn được xem là người đầu tiên đặt nền móng toán học cho di truyền học hiện đại. Đi theo con đường đã được vạch ra bởi Mendel, nhà thống kê có ảnh hưởng lớn người Anh Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) đã lập ra ngành di truyền học quần thể - một nhánh của toán học tập trung vào việc lập mô hình phân bố các gen trong một quần thể và tính toán sự thay đổi tần suất gen theo thời gian. Các nhà di truyền học

ngày nay có thể sử dụng việc lấy mẫu thống kê kết hợp với nghiên cứu ADN để dự đoán các đặc tính có thể của đứa con chưa chào đời. Vậy, xác suất và thống kê có quan hệ với nhau chính xác là như thế nào?

Các sự kiện và dự báo

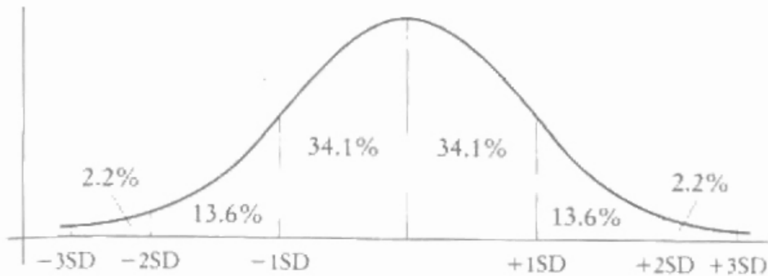
Đối với các nhà khoa học đang cố gắng giải mã sự tiến hóa của vũ trụ thì họ thường thử giải quyết vấn đề từ cả hai phía. Có những người bắt đầu từ những thăng giáng nhỏ bé nhất trong kết cấu của vũ trụ nguyên thủy, và có những người thì nghiên cứu từng chi tiết trong trạng thái hiện tại của vũ trụ. Những người loại thứ nhất sử dụng các mô phỏng trên các máy tính lớn để suy ra quá trình tiến hóa của vũ trụ. Còn những người loại thứ hai thì thực hiện các công việc như của các thám tử để suy ra quá khứ của vũ trụ từ vô số những sự kiện về hiện trạng của nó. Lý thuyết xác suất và thống kê liên quan với nhau theo cách tương tự. Trong lý thuyết xác suất, các biến số và trạng thái ban đầu đã biết, và mục tiêu là tiên đoán kết quả cuối cùng có xác suất lớn nhất. Còn trong thống kê, kết quả thì đã biết, nhưng những nguyên nhân trong quá khứ thì lại còn bất định.

Hãy xem xét một ví dụ đơn giản để thấy hai lĩnh vực này bổ trợ cho nhau như thế nào và gặp nhau đâu đó ở giữa ra sao. Chúng ta có thể bắt đầu từ thực tế là các nghiên cứu thống kê cho thấy rằng các phép đo một tập hợp nhiều đại lượng vật lý khác nhau và thậm chí của nhiều đặc tính của con người đều được phân bố theo *đường cong tần suất chuẩn*. Nói một cách chính xác hơn, đường cong chuẩn không phải là một đường



Hình 36

cong duy nhất mà là một họ các đường cong, tất cả đều có thể mô tả được bằng cùng một hàm số tổng quát và đều được đặc trưng hoàn toàn chỉ bởi hai đại lượng toán học. Đại lượng thứ nhất - *giá trị trung bình* - là giá trị trung tâm mà phân bố xung quanh nó là đối xứng. Tất nhiên giá trị thực của giá trị trung bình phụ thuộc vào loại biến số được đo (ví dụ cân nặng, chiều cao, hay chỉ số IQ). Ngay cả với cùng một biến số thì giá trị trung bình cũng có thể khác nhau đối với các quần thể khác nhau. Chẳng hạn, giá trị chiều cao trung bình của đàn ông Thụy Điển có thể khác với giá trị chiều cao trung bình của đàn ông ở Peru. Đại lượng thứ hai xác định đường cong chuẩn được gọi là *độ lệch chuẩn*. Đây là số đo độ phân tán của các dữ liệu quanh giá trị trung bình. Trong hình 36, đường cong chuẩn (a) có độ lệch chuẩn lớn nhất, bởi vì các giá trị phân tán rộng hơn. Tuy nhiên, ở đây xuất hiện một thực tế thú vị. Bằng cách sử dụng tích phân để tính diện tích nằm dưới đường cong, người ta có thể chứng minh bằng toán học rằng bất luận giá trị trung bình hay độ lệch chuẩn là như thế nào thì 68,2% dữ liệu cũng nằm trong vùng bị kẹp giữa một lệch chuẩn (1 SD) ở hai bên giá trị trung bình (như trong H.37). Nói cách khác, nếu giá trị IQ trung bình của một quần thể dân số (lớn) nào đó là 100,



Hình 37

và độ lệch chuẩn là 15 thì khi đó 68,2% người trong quần thể đó có chỉ số IQ nằm trong khoảng từ 85 đến 115. Hơn nữa, đối với mọi đường cong tần suất chuẩn, 95,4% của mọi trường hợp đều nằm trong khoảng giữa hai độ lệch chuẩn ở hai bên giá trị trung bình, và 99,7% dữ liệu nằm giữa ba độ lệch chuẩn ở hai bên giá trị trung bình (hình 37). Điều này ngụ ý rằng, trong ví dụ trên, 95,4% người dân ở đây có IQ nằm giữa 70 và 130 và 99,7% có IQ nằm giữa 55 và 145.

Giờ hãy giả sử rằng chúng ta muốn dự đoán xác suất chọn ngẫu nhiên ra một người trong quần thể đang xét có IQ nằm giữa 85 và 100. Hình 37 cho chúng ta thấy xác suất ấy phải là 0,341 (hay 34,1%), vì theo các định luật xác suất, xác suất đơn giản là số các kết cục thỏa mãn yêu cầu đã cho chia cho tổng số các khả năng. Hay chúng ta có thể muốn tìm xác suất mà một người nào đó (chọn ngẫu nhiên) có IQ lớn hơn 130 trong quần thể đó. Chỉ cần liếc nhìn hình 37 là ta có thể thấy xác suất này chỉ là 0,022, hay 2,2%. Tương tự như vậy, bằng cách sử dụng các tính chất của phân bố chuẩn và công cụ tích phân (để tính diện tích), người ta có thể tính được xác suất của chỉ


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicé scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

Hình 38

số IQ trong một vùng bất kỳ cho trước. Nói cách khác, lý thuyết xác suất và người bạn đồng hành bổ sung cho nó là thống kê, khi kết hợp lại, sẽ cho chúng ta câu trả lời.

Như tôi đã lưu ý vài lần, xác suất và thống kê trở nên có ý nghĩa chỉ khi người ta xử lý một số lượng lớn các sự kiện, chứ không bao giờ là những sự kiện đơn lẻ. Sự nhận thức rất quan trọng này, được gọi là *định luật về số lớn*, có được là nhờ Jakob Bernoulli, người đã phát biểu nó như một định lý trong cuốn sách *Ars Conjectandi* (*Nghệ thuật phỏng đoán*; hình 38 là trang bìa cuốn sách này). Nói theo ngôn từ đơn giản, thì định lý này phát biểu rằng nếu xác suất xảy ra của một sự kiện là p, thì p là tỷ lệ khả dĩ nhất của những lần xuất hiện sự kiện so với tổng số lần thử nghiệm. Thêm vào đó, vì số lần thử tiến đến vô cùng, nên tỷ lệ thành công trở thành p là chắc chắn. Dưới

đây là cách Bernoulli giới thiệu quy luật số lớn trong cuốn *Ars Conjectandi:* "Điều vẫn còn được nghiên cứu là liệu bằng cách tăng số lần quan sát chúng ta cũng có thể làm tăng xác suất sao cho tỷ lệ của trường hợp thỏa mãn với không thỏa mãn sẽ tiến tới tỷ số thực, sao cho xác suất này cuối cùng sẽ vượt quá mức độ chắc chắn mong đợi hay không". Sau đó ông đã giải thích khái niệm này bằng một ví dụ cụ thể:

> Chúng ta có một cái bình chứa 3000 viên sỏi màu trắng và 2000 viên sỏi màu đen, và chúng ta mong muốn xác định theo kinh nghiệm tỷ số giữa sỏi trắng và sỏi đen - điều mà chúng ta chưa biết - bằng cách lấy từng viên sỏi ra khỏi bình và ghi lại bao nhiêu lần lấy ra được viên sỏi trắng và bao nhiêu lần lấy ra được viên sỏi đen. (Tôi lưu ý các bạn rằng, trước khi lấy viên sỏi tiếp theo, một yêu cầu quan trọng của quá trình này là bạn phải cho viên sỏi vừa lấy ra trở lại bình sau khi đã ghi lại màu sắc của nó, vì vậy số lượng sỏi trong bình luôn luôn không đổi). Giờ thì chúng ta sẽ hỏi, liệu bằng cách mở rộng vô hạn số phép thử có thể làm tăng 10, 100, 1000, v.v..., lần chắc chắn hơn (và sau cùng là "chắc chắn về luân lý") rằng tỷ số giữa số lần rút được viên sỏi trắng với số lần rút ra được viên sỏi đen sẽ có cùng giá trị (3:2) như tỷ số thực giữa sỏi trắng và sỏi đen trong bình, chứ không phải là một giá trị khác? Nếu câu trả lời là không thì tôi phải thừa nhận rằng chúng ta đã thất bại trong nỗ lực nhằm khẳng định số các sự kiện của mỗi trường hợp (như số các viên sỏi trắng và đen) bằng quan sát. Nhưng nếu điều đó là đúng thì chúng ta cuối cùng có thể đạt được sự

> chắc chắn về mặt tinh thần bằng phương pháp này [và Jakob Bernoulli đã chứng minh điều đó trong chương tiếp theo của *Ars Conjectandi*]... khi đó chúng ta sẽ xác định được số các sự kiện *hậu nghiệm (a posteriori)* với độ chính xác lớn gần như thể chúng đã biết chúng một cách *tiên nghiệm (a priori)*.

Bernoulli đã dành hai mươi năm trời để hoàn thiện định lý này, một định lý mà từ đó đã trở thành một trong những cột trụ trung tâm của thống kê. Ông đã kết luận với niềm tin của mình vào sự tồn tại tối hậu của các định luật chi phối, thậm chí trong cả những sự kiện mà dường như chỉ là vấn đề may rủi:

> Nếu tất cả các sự kiện từ nay đến vĩnh cửu được quan sát một cách liên tục (mà ở đó xác suất cuối cùng đã trở thành chắc chắn), thì chúng ta sẽ thấy rằng vạn vật trong thế giới này đều xuất hiện vì những lý do xác định và trong sự phù hợp hoàn toàn với quy luật, và vì vậy ngay cả với những điều tưởng chừng như là hoàn toàn ngẫu nhiên, chúng ta cũng buộc phải thừa nhận một mức độ tất yếu, và dường như có một tính định mệnh nhất định. Với tất cả những gì tôi biết thì đó chính là điều mà Plato đã nghĩ khi, trong thuyết về vũ trụ luân hồi, ông đã khẳng định rằng sau một hành trình qua vô số thế kỷ, vạn vật sẽ lại trở về trạng thái ban đầu của chúng.

Bài học rút ra từ câu chuyện về khoa học bất định này là rất đơn giản: Toán học có thể ứng dụng được theo một cách nào đó vào những lĩnh vực ít "khoa học" của đời sống của chúng

ta, kể cả những lĩnh vực dường như bị chi phối bởi may rủi thuần túy. Vì vậy trong nỗ lực giải thích "tính hiệu quả đến phi lý" của toán học, chúng ta không thể giới hạn sự thảo luận chỉ đóng khung trong các định luật của vật lý học. Mà hơn thế, chúng ta cuối cùng sẽ phải bằng cách nào đó hình dung ra cái gì đã làm cho toán học lại hiện diện ở khắp mọi nơi như vậy.

Sức mạnh phi thường của toán học đã không phải không có tác động đến kịch tác gia và nhà văn viết tiểu luận kiệt xuất George Barnard Shaw (1856-1950). Rõ ràng là không nổi tiếng về tài năng toán học, song Shaw từng viết một bài báo uyên thâm về thống kê và xác suất với nhan đề "Sự đồi bại của Cờ bạc và sự tốt đẹp của Bảo hiểm". Trong bài báo này, Shaw thừa nhận rằng với ông bảo hiểm "dựa trên những thực tế không thể giải thích được và những rủi ro có thể tính toán được chỉ bởi các nhà toán học chuyên nghiệp". Vì vậy, ông đưa ra sự quan sát sâu sắc dưới đây:

> Hãy hình dung một cuộc đàm phán làm ăn giữa một nhà buôn muốn buôn bán với nước ngoài nhưng lại vô cùng lo sợ tàu đắm hoặc bị những con vật hung dữ ăn thịt, và một thuyền trưởng muốn có hàng hóa và hành khách. Thuyền trưởng trả lời tay nhà buôn rằng hàng hóa sẽ được an toàn tuyệt đối và cả ông ta cũng thế nếu ông ta đi theo hàng. Nhưng tay nhà buôn, với đầu óc nhét đầy những chuyện phiêu lưu của Jonah, St. Paul, Odysseus, và Robinson Crusoe, không dám mạo hiểm. Cuộc nói chuyện diễn ra đại loại như thế này:
>
> *Thuyền trưởng*: Thôi nào! Tôi cá với ông vô hạn đồng bảng Anh rằng nếu ông đi tàu của tôi, ông sẽ sống và mạnh khỏe cho tới ngày này năm sau.

Nhà buôn: Nhưng nếu tôi nhận lời cá cược, tôi cũng sẽ cá với ông ngần ấy số tiền rằng tôi sẽ chết trong năm nay.

Thuyền trưởng: Thế thì tại sao lại không, nếu ông sẽ thua cuộc, vì ông chắc chắn sẽ thế mà.

Nhà buôn: Nhưng nếu tôi bị chìm thì ông cũng bị; thế thì chúng ta được gì từ vụ cá cược này chứ?

Thuyền trưởng: Đúng thế nhỉ. Nhưng tôi sẽ tìm cho ông một người trên đất liền, sẽ cá cược với gia đình và vợ ông.

Nhà buôn: Điều đó tất nhiên sẽ làm thay đổi tình hình đấy; nhưng thế còn hàng của tôi?

Thuyền trưởng: Ồ! Cá cược này cũng tính cả hàng hóa chứ. Hay hai cá cược nhé: một về mạng sống của ông, một là về hàng hóa. Cả hai sẽ an toàn, tôi đảm bảo với ông đấy. Sẽ chẳng có chuyện gì xảy ra cả; và ông sẽ thấy tất cả những kỳ quan cần phải thấy ở nước ngoài.

Nhà buôn: Nhưng nếu tôi và hàng hóa của tôi đến nơi an toàn, tôi sẽ phải trả ông tất cả của cải của đời tôi và cả hàng hóa đem bán nữa. Nếu tôi không bị chìm thì tôi cũng sẽ bị phá sản thôi.

Thuyền trưởng: Điều đó cũng đúng nhỉ. Nhưng cũng không nhiều nhặn gì cho tôi như ông nghĩ đâu. Nếu ông bị chìm, tôi cũng sẽ bị chìm trước; vì tôi phải là người cuối cùng rời khỏi con tàu bị đắm. Vì vậy, để tôi thuyết phục ông mạo hiểm nhé. Tôi sẽ cá 10 ăn 1. Như thế có hấp dẫn ông không?

Nhà buôn: Ờ, trong trường hợp đó thì...

Thuyền trưởng đã khám phá ra bảo hiểm cũng giống như thợ kim hoàn nghĩ ra ngân hang vậy.

Với những người như Shaw, phàn nàn rằng trong nền giáo dục của mình "không có một từ nào nói về ý nghĩa hay tiện ích của toán học", thì câu chuyện vui về "lịch sử" của toán học trong bảo hiểm là rất đáng kể.

Trừ câu chuyện của Shaw, đến nay, chúng ta vẫn đi theo sự tiến triển của một số nhánh toán học phần nào thông qua con mắt của những nhà toán học thực hành. Với những người này, và thực sự thì với nhiều nhà triết học duy lý như Spinoza, thì học thuyết Plato là rất rõ ràng. Không có nghi ngờ gì về chuyện những chân lý toán học đã tồn tại trong thế giới của riêng của chúng và rằng trí tuệ con người có thể tiếp cận những chân lý đó mà không cần có bất kỳ sự quan sát nào, mà chỉ cần bằng khả năng suy luận. Những dấu hiệu đầu tiên về khoảng trống tiềm ẩn giữa nhận thức về hình học Euclid như là một sự tập hợp những chân lý phổ quát và các nhánh khác của toán học đã được nhà triết học Ireland George Berkeley, giám mục ở Cloyne (1685-1753) đề cập. Trong cuốn sách nhỏ nhan đề *Nhà giải tích; Hay Bàn thảo với một nhà toán học vô thần* (người nói đến ở vế sau được cho là Edmond Halley), Berkeley đã chỉ trích ngay chính những nền tảng của lĩnh vực giải tích và phép tính vi tích phân, được đưa ra bởi Newton (trong *Principia*) và Leibniz. Đặc biệt là Berkeley đã chứng minh rằng khái niệm "đạo hàm" của Newton, hay tốc độ biến thiên tức thời, là không được định nghĩa một cách chặt chẽ, mà điều này theo suy nghĩ của Berkeley đã là đủ để nghi ngờ toàn bộ lĩnh vực này:

> Phương pháp vi phân là một chìa khóa chung, giúp các nhà toán học hiện đại mở khóa những bí mật của Hình học, và do đó của cả Tự nhiên... Nhưng liệu Phương pháp này là rõ ràng hay mơ hồ, nhất quán hay mâu thuẫn, có luận chứng hay không có cơ sở, vì tôi mong muốn sự hoàn toàn vô tư, nên tôi đề nghị sự Suy xét của chính ngài và của mọi độc giả công tâm.

Berkeley chắc chắn là đã chạm đến đúng vấn đề và thực tế là một lý thuyết giải tích hoàn toàn nhất quán chỉ được phát biểu có hệ thống vào những năm 1960. Song toán học sắp phải trải qua một cuộc khủng hoảng mạnh mẽ hơn vào thế kỷ 19.

CHƯƠNG 6

NHÀ HÌNH HỌC: CÚ SỐC TƯƠNG LAI

Trong cuốn sách nổi tiếng *Cú sốc tương lai* của mình, tác giả Alvin Toffler đã định nghĩa thuật ngữ trên nhan đề của nó là "sự căng thẳng choáng váng và mất phương hướng mà chúng ta gây ra cho các cá nhân khi bắt họ phải chịu sự quá nhiều thay đổi trong một thời gian quá ngắn". Vào thế kỷ 19, các nhà toán học, khoa học và triết học chính xác là đã trải qua một cú sốc như vậy. Thực tế, niềm tin đã kéo dài hàng thiên niên kỷ rằng toán học đưa ra những chân lý vĩnh cửu và không thể thay đổi, niềm tin ấy giờ đây đã bị tan vỡ. Sự thay đổi đột ngột về trí tuệ không được mong đợi này là do sự xuất hiện của những loại hình học mới, ngày nay gọi là *hình học phi Euclid*. Thậm chí mặc dù hầu hết những người không chuyên có thể chưa bao giờ nghe nói tới hình học phi Euclid, song tầm vóc của cuộc cách mạng trong tư duy được khởi xướng bởi những lĩnh vực toán học mới mẻ này với một số người được ví như thuyết tiến hóa của Darwin vậy.

Để đánh giá một cách đầy đủ bản chất của sự thay đổi sâu rộng này trong thế giới quan, trước hết chúng ta hãy xem xét một cách ngắn gọn bối cảnh lịch sử-toán học.

"Chân lý" kiểu Euclid

Cho mãi đến đầu thế kỷ 19, nếu như có một nhanh tri thức nào được xem là chắc chắn và như là sự suy tôn chân lý thì đó là hình học Euclid, hình học truyền thống mà tất cả chúng ta đều học ở nhà trường. Vì vậy, không có gì đáng ngạc nhiên khi mà nhà triết học Do Thái người Hà Lan vĩ đại Baruch Spinoza (1632-77) đã đặt tên cho nỗ lực táo bạo của mình nhằm thống nhất khoa học, tôn giáo, đạo đức và lý trí là *Đạo đức, được minh chứng trong trật tự hình học*. Hơn nữa, mặc dù có sự khác biệt rõ ràng giữa thế giới Platonic lý tưởng về các hình dạng toán học và thực tại vật lý, nhưng hầu hết các nhà khoa học vẫn xem những đối tượng của hình học Euclid đơn giản là sự trừu tượng hóa được chưng cất từ những đối ứng vật lý, có thực của chúng. Ngay cả người theo chủ nghĩa kinh nghiệm chắc chắn như David Hume (1711-76), người khăng khăng rằng chính những nền tảng của toán học còn kém chắc chắn hơn tất cả những gì mà người ta đã từng nghi ngờ, cũng phải kết luận rằng hình học Euclid là vững chắc như núi đá Gibraltar. Trong cuốn *Một cuộc điều tra liên quan đến hiểu biết của con người*, Hume đã chỉ ra các "chân lý" có hai loại:

> Tất cả mọi đối tượng của suy lý hay điều tra của con người đều có thể được chia một cách tự nhiên thành hai loại, cụ thể là: Mối quan hệ của các Ý tưởng và Thực tế. Thuộc loại thứ nhất là... mọi khẳng định hoặc bằng trực giác hoặc được chứng minh là chắc chắn... Các mệnh đề thuộc loại này có thể được khám phá ra chỉ bằng thao tác tư duy, chứ không phụ thuộc vào chuyện

> có tồn tại ở đâu đó trong vũ trụ. Mặc dù không bao giờ có một đường tròn hay hình tam giác trong tự nhiên, song các chân lý được chứng minh bởi Euclid sẽ mãi mãi giữ được sự chắc chắn và hiển nhiên của chúng. Còn Thực tế... không được khẳng định theo cách như thế; cả bằng chứng của chúng ta về sự đúng đắn của chúng cũng vậy, dù mạnh đến thế nào, cũng có cùng bản chất như thế. Sự đối lập của mỗi thực tế là vẫn có thể xảy ra; bởi vì nó không bao giờ hàm ý một sự mâu thuẫn cả... Mặt trời sẽ không mọc vào ngày mai là một tuyên bố không hàm ý mâu thuẫn gì hơn khẳng định rằng Mặt trời sẽ mọc. Vì vậy, sẽ là vô ích khi chúng ta cố gắng chứng minh điều đó là sai lầm.

Nói cách khác, trong khi Hume, giống như tất cả những người theo chủ nghĩa kinh nghiệm khác, khẳng định rằng mọi tri thức đều có nguồn gốc từ sự quan sát, thì hình học và những "chân lý" của nó sẽ vẫn còn được hưởng một vị thế có nhiều ưu ái.

Nhà triết học kiệt xuất người Đức Immanuel Kant (1724-1804) không phải luôn luôn đồng quan điểm với Hume, song ông cũng đề cao hình học Euclid tới địa vị tuyệt đối chắc chắn và có giá trị không thể nghi vấn. Trong cuốn sách đáng nhớ của ông *Phê phán lý tính thuần túy*, Kant đã thử đảo ngược, theo nghĩa nào đó, mối quan hệ giữa trí tuệ và thế giới vật lý. Thay cho những ấn tượng về thực tại vật lý in dấu lên một trí tuệ hoàn toàn thụ động, Kant lại cho trí tuệ vai trò chủ động trong việc "dựng nên" và "xử lý" vũ trụ được nhận thức. Hướng sự chú ý vào bên trong, Kant đặt câu hỏi không phải về chúng ta có thể biết *cái gì*, mà là *làm thế nào* chúng ta có thể biết những điều

chúng ta có thể biết. Ông giải thích rằng trong khi mắt chúng ta thu nhận các hạt ánh sáng thì những hạt này còn chưa tạo nên hình ảnh trong ý thức của chúng ta cho đến khi thông tin được xử lý và tổ chức bởi bộ não chúng ta. Vai trò then chốt trong quá trình dựng nên hình ảnh này được gán cho sự nắm bắt không gian một cách trực giác hay tổng hợp của con người một cách *tiên nghiệm*, mà đến lượt mình, nó lại được lấy dựa trên hình học Euclid. Kant tin rằng hình học Euclid đã mở ra con đường đúng đắn duy nhất cho việc xử lý và khái niệm hóa không gian, và sự làm quen với không gian một cách trực giác và phổ quát này nằm ở trung tâm kinh nghiệm của chúng ta về thế giới tự nhiên. Kant viết:

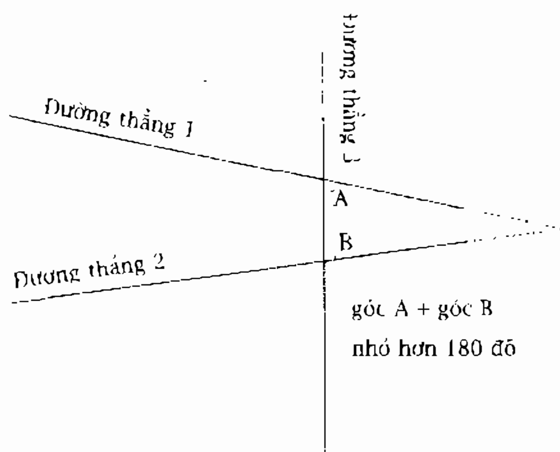
> Không gian không phải là một khái niệm thường nghiệm được rút ra từ kinh nghiệm bên ngoài... Không gian là một biểu tượng tất yếu *tiên nghiệm*, làm cơ sở cho mọi trực quan bên ngoài... Tính xác tín hiển nhiên của mọi nguyên lý hình học và khả năng tạo dựng nên chúng một cách *tiên nghiệm* đều dựa trên tính tất yếu này của một biểu tượng *tiên nghiệm* của không gian. Vì nếu trực giác về không gian là một khái niệm có được một cách *hậu nghiệm*, vay mượn từ kinh nghiệm bên ngoài nói chung thì những nguyên lý đầu tiên của định nghĩa toán học sẽ không gì khác hơn là những tri giác. Như vậy, chúng có mọi tính bất tất/ngẫu nhiên của tri giác, và việc chỉ có một đường thẳng nối hai điểm sẽ không phải là một tất yếu mà chỉ là điều gì đó được dạy trong mỗi trường hợp bằng kinh nghiệm mà thôi.

Để nói một cách đơn giản hơn, thì theo Kant, nếu chúng ta nhận biết được một vật, thì vật đó tất yếu phải thuộc về không gian và là đối tượng của hình học Euclid.

Những ý tưởng của Hume và Kant đã làm nổi lên hai khía cạnh khá khác nhau, nhưng có tầm quan trọng ngang nhau, mà về phương diện lịch sử gắn liền với hình học Euclid. Khía cạnh thứ nhất là tuyên bố rằng hình học Euclid biểu diễn sự mô tả chính xác duy nhất về không gian vật lý. Khía cạnh thứ hai là sự đồng nhất hình học Euclid với cấu trúc suy diễn vững chắc, quyết định và không thể sai lầm. Kết hợp lại, hai tính chất giả định này đã cung cấp cho các nhà toán học, khoa học và triết học những thứ mà họ coi là bằng chứng mạnh nhất chứng tỏ rằng những chân lý tất yếu và giàu thông tin về vũ trụ là thực sự tồn tại. Cho mãi đến thế kỷ 19, những tuyên bố này mới được công nhận. Nhưng liệu chúng có thực sự là đúng không?

Nền tảng của hình học Euclid đã được xây đặt vào khoảng năm 300 trước CN bởi nhà toán học người Hy Lạp Euclid ở Alexandria. Trong tác phẩm đồ sộ gồm 13 tập của ông nhan đề *Cơ sở*, Euclid đã nỗ lực dựng lên môn hình học trên một cơ sở lôgic được xác định rất rõ ràng. Ông đã bắt đầu với 10 tiên đề được cho là đúng đắn không thể bàn cãi và tìm cách chứng minh một số lượng lớn các mệnh đề (định lý) dựa trên các tiên đề này chỉ bằng những suy luận lôgic.

Bốn tiên đề đầu tiên của Euclid cực kỳ đơn giản và súc tích. Chẳng hạn, tiên đề đầu tiên phát biểu: "Giữa bất kỳ hai điểm nào cũng đều có thể dựng được một đường thẳng". Tiên đề thứ tư phát biểu: "Mọi góc vuông đều bằng nhau". Ngược lại, tiên đề thứ năm, được gọi là "tiên đề đường thẳng song song", phát biểu hơi phức tạp hơn một chút nhưng ít hiển nhiên hơn

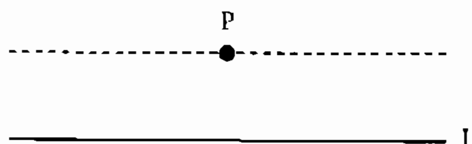


Hình 39

một cách đáng kể: "Nếu hai đường thẳng nằm trên một mặt phẳng cắt một đường thẳng thứ ba sao cho tổng các góc trong cùng phía nhỏ hơn hai góc vuông, thì hai đường thẳng đó chắc chắn sẽ cắt nhau nếu được kéo đủ dài về phía đó." Hình 39 minh họa nội dung của tiên đề này. Dù không ai nghi ngờ tính đúng đắn của phát biểu này, song ở nó không có sự đơn giản giàu tính thuyết phục của các tiên đề khác. Tất cả các chỉ dấu đều cho thấy ngay cả bản thân Euclid cũng không hoàn toàn hài lòng với tiên đề thứ năm của mình - bằng chứng là 81 mệnh đề (định lý) trong cuốn *Cơ sở* không sử dụng đến nó một lần nào. Một phiên bản tương đương của tiên đề thứ năm mà ngày nay được sử dụng nhiều nhất đã xuất hiện lần đầu tiên trong các bình luận của nhà toán học Hy Lạp Proclus vào thế kỷ thứ 5, song nó lại thường được gọi là "tiên đề Playfair" theo tên của nhà toán học Scotland John Playfair (1748-1819).

Phiên bản này được phát biểu như sau: "Với một đường thẳng đã cho và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó, ta chỉ có thể vẽ được đúng một đường thẳng đi qua điểm đó và song song với đường thẳng đã cho" (xem H. 40). Hai phiên bản của tiên đề 5 là tương đương theo nghĩa tiên đề Playfair (cùng với các tiên đề khác) nhất thiết phải kéo theo tiên đề 5 gốc của Euclid và ngược lại.

Qua nhiều thế kỷ, sự không hài lòng với tiên đề 5 ngày càng tăng dẫn đến rất nhiều nỗ lực thực sự muốn chứng minh tiên đề này từ chín tiên đề còn lại hoặc thay thế nó bằng một tiên đề hiển nhiên hơn, nhưng đều không thành công. Khi những nỗ lực này thất bại, nhiều nhà hình học khác bắt đầu tìm cách trả lời câu hỏi rất hấp dẫn và thú vị: điều gì sẽ xảy ra nếu như trên thực tế tiên đề thứ 5 không chứng minh được là đúng? Một số những người này đã bắt đầu đưa ra những nghi ngờ gây tranh cãi rằng liệu các tiên đề của Euclid có thực sự là hiển nhiên chứ không phải là dựa trên kinh nghiệm hay không. Phán quyết đáng ngạc nhiên cuối cùng đã đến vào thế kỷ 19: Người ta có thể sáng tạo ra những loại hình hình học mới bằng cách *chọn* một tiên đề khác với tiên đề thứ 5 của Euclid. Hơn nữa, hình học "phi Euclid" này về nguyên tắc cũng có thể mô tả được không gian vật lý chính xác như hình học Euclid đã làm.



Hình 40

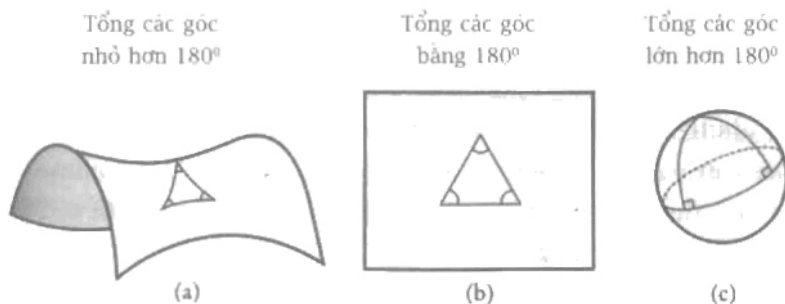
Hãy dừng lại ở đây một chút để thấm nhuần ý nghĩa của từ "chọn". Trong nhiều thiên niên kỷ, hình học Euclid được xem là duy nhất và *tất yếu* - một cách mô tả duy nhất đúng về không gian. Việc người ta có thể chọn các tiên đề và nhận được sự mô tả cũng đúng đắn không kém đã làm một cuộc cách mạng đối với toàn bộ khái niệm này. Cái sơ đồ suy diễn được xây dựng một cách thận trọng và chắc chắn đột nhiên trở nên giống như một trò chơi mà trong đó các tiên đề đơn giản chỉ đóng vai trò là luật chơi mà thôi. Bạn có thể thay đổi các tiên đề và chơi một trò chơi khác. Khỏi cần phải nói quá tác động của nhận thức này đến sự tìm hiểu bản chất của toán học.

Một số ít các nhà toán học giàu sáng tạo đã chuẩn bị *cơ sở* cho cuộc tấn công cuối cùng vào hình học Euclid. Đặc biệt đáng chú ý trong số họ là giáo sĩ dòng Tên Girolamo Saccheri (1667-1733), người đã nghiên cứu những hệ quả của việc thay thế tiên đề thứ 5 bằng một phát biểu khác, và hai nhà toán học người Đức là Georg Klugel (1739-1812) và Johann Heinrich Lambert (1728-1777), những người đầu tiên đã nhận ra rằng có thể tồn tại những hình học khác thay thế cho hình học Euclid. Dù vậy, vẫn cần có ai đó đóng cái đinh cuối cùng vào chiếc quan tài chứa ý tưởng cho rằng hình học Euclid là một biểu diễn duy nhất của không gian. Vinh dự đó được chia cho ba nhà toán học, một của nước Nga, một của Hungary và một của nước Đức.

Những thế giới mới lạ

Người đầu tiên xuất bản cả một chuyên luận về một loại hình học mới - hình học có thể xây dựng trên một mặt có hình dạng

như một cái yên ngựa cong (H. 41a) - đó là Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856; H. 42). Trong loại hình học này (ngày nay được gọi là *hình học hyperbolic*), tiên đề thứ 5 của Euclid được thay thế bằng phát biểu rằng: Cho một đường thẳng trên một mặt phẳng và một điểm không nằm trên đường thẳng đó, có ít nhất hai đường thẳng đi qua điểm đó và song song với đường thẳng đã cho. Sự khác biệt quan trọng giữa hình học Lobachevsky và hình học Euclid đó là trong loại hình học sau, tổng các góc trong một tam giác luôn bằng 180 độ (H. 41b), còn trong loại hình học trước, thì tổng đó luôn nhỏ hơn 180 độ. Vì công trình của Lobachevsky xuất hiện trên tạp chí *Kazan Bulletin*, một tạp chí không mấy tiếng tăm, nên nó gần như hoàn toàn không được chú ý cho mãi đến khi bản dịch sang tiếng Pháp và tiếng Đức của nó xuất hiện vào cuối những năm 1830.



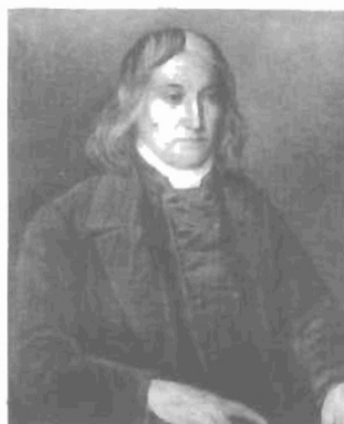
Hình 41

Hoàn toàn không biết gì về tác phẩm của Lobachevsky, một nhà toán học trẻ người Hungary là János Bolyai (1802-60) cũng đã xây dựng được một hình học tương tự trong suốt những năm



Hình 42

1820. Tràn đầy nhiệt huyết của tuổi trẻ, vào năm 1823, ông đã viết thư cho cha mình (nhà toán học Farkas Bolyai; H. 43): "Con đã phát hiện ra những thứ tuyệt vời đến mức con đã phải sững sờ... Con đã tạo ra cả một thế giới mới khác từ không gì cả..." Đến năm 1825, János thực sự đã có thể đặt trước Bolyai cha bản thảo đầu tiên về hình học mới của ông. Bản thảo mang tên *Khoa học tuyệt đối về không gian (The Science Absolute of Space)*. Mặc cho sự phấn khích của chàng trai trẻ, người cha hoàn toàn không bị thuyết phục bởi tính hợp lý trong những ý tưởng của János. Tuy nhiên, ông đã quyết định công bố hình học mới này như là một phụ lục trong một chuyên luận hai tập của ông về những cơ sở của hình học, số học và giải tích (với cái tên rất hấp dẫn là *Tiểu luận về những cơ sở của toán học dành cho các thanh niên ham học)*. Một bản của cuốn sách đã được gửi đến một người bạn của Farkas là Carl Friedrich Gauss (1777-1855; H. 44) vào tháng 6 năm 1831, người không chỉ là nhà toán học kiệt xuất nhất vào thời đó mà còn là nhân vật



Hình 43

được nhiều người cho rằng, cùng với Archimedes và Newton, là ba nhà toán học vĩ đại nhất mọi thời đại. Cuốn sách này vì lý do gì đó đã bị thất lạc trong cảnh hỗn loạn gây ra bởi trận dịch tả và Farkas đã phải gửi đến bản thứ hai. Gauss đã trả lời vào ngày 6 tháng 3 năm 1832, và bình luận của ông lại không phải là những gì mà chàng trai trẻ János mong đợi:

> Nếu tôi bình luận bằng cách nói rằng tôi không thể tán thưởng công trình này thì chắc là anh sẽ ngạc nhiên đôi chút. Nhưng tôi không thể nói khác đi được. Để tán thưởng nó, thì cũng có nghĩa là tán thưởng bản thân tôi. Thực sự thì toàn bộ nội dung của cuốn sách, con đường mà con trai anh đã lựa chọn, kết quả mà cậu ta đã thu được, đều trùng khớp với hầu như toàn bộ sự suy ngẫm của tôi, những suy ngẫm đã phần nào xâm chiếm tâm trí tôi trong suốt 30 hay 35 năm qua. Vì



Hình 44

> vậy tôi thật sự kinh ngạc. Còn về công trình của chính tôi, mà cho đến tận giờ tôi mới chỉ viết được chút ít ra giấy, thì ý định của tôi là sẽ không công bố chừng nào mà tôi còn sống.

Tôi xin phép được mở ngoặc nhận xét rằng rõ ràng là Gauss đã lo sợ hình học mới hoàn toàn này sẽ bị các nhà triết học theo trường phái Kant, những người mà ông coi là bọn "Boetian" (đồng nghĩa với từ "ngu ngốc" theo tiếng Hy Lạp cổ), xem là dị giáo triết học. Gauss viết tiếp:

> Mặt khác, ý định của tôi là sẽ viết ra tất cả những điều đó để cho sau này, ít nhất thì nó cũng không tàn lụi đi cùng với tôi. Chính vì vậy, thật là một sự ngạc nhiên dễ chịu là tôi thoát được sự phiền phức này, và tôi rất vui vì chính con trai một người bạn cũ của tôi đã chiếm lấy quyền ưu tiên theo cách xuất sắc như vậy.

Trong khi Farkas hoàn toàn hài lòng với sự tán thưởng của Gauss, mà ông cho là "rất tuyệt", thì János lại vô cùng thất vọng. Trong vòng gần một thập kỷ, anh không tin điều tuyên bố của Gauss về tác quyền, và mối quan hệ của anh với cha mình (người mà anh nghi ngờ đã thông báo quá sớm những kết quả này cho Gauss) đã trở nên rất căng thẳng. Khi cuối cùng anh hiểu ra rằng Gauss thực sự đã bắt đầu nghiên cứu vấn đề này ngay từ năm 1799, János đã trở nên cay đắng một cách tuyệt vọng, và những thành quả toán học sau này của anh (anh đã để lại khoảng 20 ngàn trang bản thảo khi qua đời) đều khá mờ nhạt.

Tuy nhiên, có rất ít nghi ngờ rằng Gauss đã thực sự có những suy nghĩ đáng kể về hình học phi Euclid. Trong nhật ký tháng 9 năm 1799, ông đã viết: "*In principiis geometriae egregios progressus fecimus*" ("Về các nguyên lý hình học mà chúng tôi đã thu được những thành quả tuyệt vời". Sau đó vào năm 1813, ông đã viết: "Trong lý thuyết về các đường thẳng song song, chúng ta giờ cũng không đi xa hơn Euclid. Đó là *partie honteuse* [phần đáng xấu hổ] của toán học, mà không sớm thì muộn cũng phải có một dạng rất khác." Một vài năm sau, trong bức thư viết ngày 28 tháng 4 năm 1817, ông nói: "Tôi ngày càng đi gần tới sự tin chắc chắn rằng sự tất yếu của hình học của chúng ta [tức hình học Euclid] là không thể được chứng minh". Cuối cùng, và ngược với quan điểm của Kant, Gauss đã kết luận rằng hình học Euclid không thể được xem như là một chân lý phổ quát nữa, mà đúng hơn, "người ta cần xếp hình học [Euclid] không phải cùng hàng với số học, là cái *tiên nghiệm*, mà chỉ được xếp ngang với cơ học mà thôi". Các kết luận tương tự cũng được đưa ra một cách độc lập bởi Ferdinand

Schweikart (1780-1859), một giáo sư luật học, và ông này đã thông báo cho Gauss về thành quả của mình vào khoảng thời gian đầu đó trong năm 1818 hoặc 1819. Tuy nhiên, vì cả Gauss lẫn Schweikart thực sự không công bố các kết quả của mình nên vinh dự công bố đầu tiên được trao cho Lobachevsky và Bolyai, mặc dù hai người họ khó có thể được xem là những "nhà sáng tạo" duy nhất của hình học phi Euclid.

Hình học hyperbolic đã làm rung chuyển thế giới toán học như một tiếng sét, nó đã giáng một đòn khủng khiếp vào nhận thức cho rằng hình học Euclid là một sự mô tả duy nhất, không thể sai lầm về không gian. Trước các công trình của Gauss-Lobachevsky-Bolyai thì trong thực tế hình học Euclid *đã là* thế giới tự nhiên. Việc người ta có thể chọn một tập hợp các tiên đề khác và xây dựng một loại hình học khác lần đầu tiên đã khơi lên sự nghi vấn rằng, xét cho cùng, thì toán học cũng chỉ là phát minh của con người chứ không phải là sự khám phá ra những chân lý tồn tại độc lập với trí tuệ con người. Đồng thời, sự sụp đổ của mối liên kết trực tiếp giữa hình học Euclid và không gian vật lý thực đã phơi bày ra những cái dường như là những thiếu sót tai hại trong ý tưởng cho rằng toán học là ngôn ngữ của vũ trụ.

Vị thế đặc quyền của hình học Euclid đã chuyển từ tình trạng xấu sang tồi tệ hơn khi mà một trong số các học trò của Gauss là Bernhard Riemann chứng tỏ được rằng hình học hyperbolic cũng không phải là thứ hình học phi Euclid duy nhất khả dĩ. Trong bài giảng tuyệt vời tại Göttingen vào ngày 10 tháng 6 năm 1854 (H. 45 là trang đầu tiên của bài giảng được công bố sau đó), Riemann đã trình bày quan điểm của mình "Về những giả thuyết nằm ở nền tảng của hình học". Ông bắt đầu bằng việc

tuyên bố rằng "hình học đã giả định trước khái niệm không gian, cũng như thừa nhận những nguyên lý cơ bản cho việc dựng hình trong không gian. Nó chỉ đưa ra những định nghĩa có tính danh nghĩa cho những thứ đó, trong khi các chi tiết thực chất lại trình hiện dưới dạng các tiên đề". Tuy nhiên, ông

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

(Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind.[1])

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse ver-

1) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; in einem besonderen Aufsatze gedenke ich demnächst auf dieselben zurückzukommen.

Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind.

Hình 45

lưu ý, "Mối quan hệ giữa những giả định trước này vẫn còn mơ hồ; chúng ta không thấy liệu mọi mối liên kết giữa chúng là tất yếu tới phạm vi nào hay mọi mối liên kết giữa chúng thậm chí có là khả dĩ về mặt *tiên nghiệm* hay không". Trong số các lý thuyết hình học khả dĩ, Riemann bàn đến *hình học eliptic*, loại hình học mà người ta có thể gặp trên một mặt cầu (hình 41c). Lưu ý rằng trong loại hình học như vậy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm không phải là một đường thẳng mà là một đoạn thuộc vòng tròn lớn có tâm trùng với tâm của hình cầu. Các hãng hàng không cũng đã biết tận dụng thực tế này - các chuyến bay từ Mỹ đến châu Âu không theo đường thẳng như ta thấy trên bản đồ mà là theo một vòng tròn lớn ban đầu hướng về phía bắc. Bạn có thể dễ dàng kiểm chứng rằng hai vòng tròn lớn bất kỳ cắt nhau tại hai điểm đối kính với nhau (tức là hai điểm này là đầu mút của một đường kính - ND). Chẳng hạn, hai kinh tuyến trên Trái Đất, dường như là song song ở xích đạo, sẽ cắt nhau tại hai cực. Hệ quả là, không giống như hình học Euclid, trong đó chỉ có chính xác một đường thẳng song song đi qua một điểm ở bên ngoài, và cũng không giống hình học hyperbolic, trong đó có ít nhất hai đường thẳng song song, trong hình học eliptic trên mặt cầu *không có* một đường thẳng song song nào hết. Riemann còn đưa các khái niệm phi Euclid tiến một bước xa hơn và đưa vào các hình học trong các không gian cong với 3, 4, và thậm chí nhiều chiều hơn. Một trong những khái niệm then chốt được mở rộng bởi Riemann là khái niệm *độ cong* - đó là tỷ lệ mà một đường cong hay một bề mặt bị uốn cong. Chẳng hạn, bề mặt của một cái vỏ trứng cong ít hơn ở xung quanh thân của nó so với đường cong đi qua một trong các đầu nhọn của nó. Riemann còn tiếp tục mở

rộng, đưa ra định nghĩa toán học chính xác về độ cong trong các không gian có số chiều bất kỳ. Trong chính quá trình đó, ông đã củng cố vững chắc sự gắn bó mật thiết giữa đại số và hình học đã được khởi xướng bởi Descartes. Trong các công trình của Riemann, các phương trình với số biến bất kỳ đã tìm thấy những đối ứng hình học của chúng và những khái niệm mới từ các hình học tiên tiến này đã trở thành bạn đồng hành của các phương trình.

Vị thế cao trọng của hình học Euclid không phải là nạn nhân duy nhất của những chân trời mới mà thế kỷ 19 đã mở ra cho hình học. Ý tưởng của Kant về không gian cũng không tồn tại được lâu hơn. Hãy nhớ lại là Kant đã khẳng định rằng thông tin từ các giác quan của chúng ta được tổ chức chỉ theo các khuôn mẫu Euclid trước khi được ghi lại trong ý thức của chúng ta. Các nhà hình học thế kỷ 19 nhanh chóng phát triển trực giác trong các hình học phi Euclid và học để trải nghiệm thế giới theo những đường hướng này. Sự nhận thức về không gian theo Euclid xét cho cùng hóa ra là do học hỏi chứ không phải là do trực giác. Tất cả những sự phát triển đầy kịch tính này đã dẫn dắt nhà toán học vĩ đại người Pháp Henri Poincaré (1854-1912) đi tới kết luận rằng các tiên đề hình học "không phải là trực giác tổng hợp *tiên nghiệm* mà cũng không phải là thực tiễn kinh nghiệm. Chúng là *những quy ước* [tác giả nhấn mạnh]". Sự lựa chọn của chúng ta trong số tất cả những quy ước khả dĩ được dẫn dắt bởi những thực tế kinh nghiệm, song vẫn còn tự do". Nói cách khác, Poincaré coi các tiên đề chỉ như là "những định nghĩa trá hình" mà thôi.

Quan điểm của Poincaré không phải bắt nguồn chỉ từ những hình học phi Euclid được mô tả cho đến nay mà còn bởi sự

phát triển mạnh mẽ của các hình học khác, mà trước khi kết thúc thế kỷ 19 hầu như vẫn còn nằm ngoài tầm tay. Chẳng hạn như trong *hình học xạ ảnh* (thu được khi một hình ảnh trên phim được chiếu trên màn hình), người ta có thể hoán đổi theo nghĩa đen vai trò của các điểm và đường, vì vậy mà các định lý về các điểm và đường (theo đúng trật tự này) sẽ biến thành các định lý về các đường và điểm. Trong *hình học vi phân*, các nhà toán học sử dụng phép tính vi tích phân để nghiên cứu các tính chất hình học địa phương (cục bộ) của các không gian toán học khác nhau, như mặt cầu hay hình xuyến (chẳng hạn như chiếc xăm ôtô -ND). Những loại hình học này và các loại khác dường như, chí ít là thoạt đầu, là những phát minh tài tình của những trí tuệ toán học giàu tưởng tượng, chứ không phải là sự mô tả chính xác không gian vật lý. Vậy thì khi đó làm thế nào người ta vẫn còn có thể bảo vệ được quan niệm về Thượng đế như là một nhà toán học? Xét cho cùng, nếu như "Thượng đế từng hình học hóa" (một câu nói được nhà sử học Plutarch cho là của Plato), thì trong số nhiều loại hình học kể trên loại hình học nào là cái hình học thần thánh này?

Sự nhận thức sâu sắc rất nhanh về những thiếu sót của hình học Euclid cổ điển đã buộc các nhà toán học phải xem xét lại một cách nghiêm túc những nền tảng của toán học nói chung, và mối quan hệ giữa toán học và lôgic nói riêng. Chúng ta sẽ còn trở lại chủ đề quan trọng này ở Chương 7. Ở đây tôi chỉ xin lưu ý rằng chính quan niệm về sự hiển nhiên của các tiên đề cũng đã bị phá vỡ. Do đó, trong khi thế kỷ 19 còn chứng kiến sự phát triển đáng kể khác trong đại số và giải tích, thì cuộc cách mạng về hình học có thể đã có những hậu quả có ảnh hưởng lớn nhất đến quan điểm về bản chất của toán học.

Về không gian, các con số và con người

Tuy nhiên, trước khi các nhà toán học có thể chuyển sang chủ đề có tính bao quát về những nền tảng của toán học, thì một vài vấn đề "nhỏ hơn" đòi hỏi phải có sự chú ý tức thì. Trước hết, việc các hình học phi Euclid được phát biểu và công bố không nhất thiết có nghĩa chúng là những đứa con hợp pháp của toán học. Đã có một nỗi lo thường trực về sự không nhất quán - đó là khả năng mà việc đưa những loại hình học này đến các hệ quả lôgic cuối cùng của chúng sẽ tạo ra những mâu thuẫn không thể giải quyết được. Vào những năm 1870, Eugenio Beltrami (1835-1900) người Italia và Felix Klein (1849-1925) người Đức đã chứng minh được rằng chừng nào mà hình học Euclid vẫn còn là phi mâu thuẫn thì các hình học phi Euclid cũng sẽ như thế. Điều này còn để ngỏ một câu hỏi còn lớn hơn nữa, đó là sự vững chắc của nền tảng của hình học Euclid. Vì vậy có một vấn đề quan trọng có liên quan. Hầu hết các nhà toán học coi các loại hình học mới này may lắm như là những thứ của lạ để giải trí. Trong khi hình học Euclid có được phần lớn sức mạnh lịch sử của nó từ việc nó được xem như là sự mô tả của không gian thực, thì các hình học phi Euclid ban đầu được nhận thức là chẳng có bất kỳ mối liên hệ nào với thực tại vật lý. Hệ quả là, các hình học phi Euclid bị nhiều nhà toán học đối xử như người anh em họ nghèo của hình học Euclid. Henri Poincaré có vẻ dễ dãi hơn một chút so với tất cả, song ngay cả ông cũng khẳng định rằng nếu con người được chuyển tới một thế giới mà ở đó hình học được chấp nhận là phi Euclid thì điều "chắc chắn là chúng ta vẫn sẽ không thấy thuận tiện hơn để thay

đổi" từ hình học Euclid sang phi Euclid. Vì vậy có hai vấn đề lớn được đặt ra: (1) Liệu hình học (nói riêng) và các nhánh khác của toán học (nói chung) có thể được thiết lập trên những nền tảng lôgic là các tiên đề vững chắc hay không? và (2) Mối quan hệ, nếu có, giữa toán học và thế giới vật lý là gì?

Một số nhà toán học đã chấp nhận một cách tiếp cận thực dụng đối với các nền tảng của hình học. Thất vọng bởi phát hiện ra rằng điều mà họ vẫn xem như là những chân lý tuyệt đối hóa ra lại chỉ dựa vào kinh nghiệm hơn là sự chặt chẽ, và họ đã chuyển sang số học - môn toán học của các con số. Hình học giải tích của Descartes, mà trong đó các điểm trên mặt phẳng được đồng nhất với các cặp số có thứ tự, các đường tròn với các cặp số thỏa mãn một phương trình nào đó (xem Chương 4), v.v, đã cung cấp chính những công cụ cần thiết để tái dựng lại nền tảng của hình học dựa trên các con số. Nhà toán học người Đức Jacob Jacobi (1804-51) có lẽ muốn nhấn mạnh những ngọn triều thay đổi này khi ông thay câu nói của Plato "Thượng đế từng hình học hóa" bằng câu châm ngôn "Thượng đế từng số học hóa". Tuy nhiên, theo một nghĩa nào đó, những cố gắng này chẳng qua chỉ là chuyển vấn đề sang một nhánh toán học khác mà thôi. Trong khi nhà toán học vĩ đại người Đức David Hilbert (1862-1943) đã thành công trong việc chứng minh hình học Euclid là phi mâu thuẫn chừng nào số học là phi mâu thuẫn, thì sự phi mâu thuẫn của số học vẫn còn xa mới xác lập được một cách rõ ràng vào thời điểm đó.

Về mối quan hệ giữa toán học và thế giới vật lý, một tình cảm mới vẫn còn đang lơ lửng. Trong nhiều thế kỷ, sự giải thích toán học như là cách đọc vũ trụ đã liên tục được đề cao một cách mạnh mẽ. Sự toán học hóa khoa học bởi Galileo, Descartes,

Newton, anh em nhà Bernoulli, Pascal, Lagrange, Quetelet và những người khác được xem như là bằng chứng mạnh mẽ chứng tỏ bản thiết kế của tự nhiên là dựa vào toán học. Người ta có thể lập luận một cách rõ ràng rằng nếu toán học không phải là ngôn ngữ của vũ trụ thì tại sao nó lại có thể vận hành tốt như là nó đã làm được trong việc giải thích mọi điều từ các định luật cơ bản của tự nhiên cho đến các đặc tính của con người.

Để đảm bảo chắc chắn, các nhà toán học đã ý thức rằng toán học chỉ liên quan với các dạng Platonic khá trừu tượng, song chúng lại được xem như là những lý tưởng hóa hợp lý của các yếu tố vật lý thực sự. Trong thực tế, cảm giác rằng cuốn sách tự nhiên được viết bằng ngôn ngữ toán học đã ăn sâu bén rễ đến mức nhiều nhà toán học đã kiên quyết từ chối ngay cả việc nghiên cứu những khái niệm và cấu trúc toán học không liên quan trực tiếp đến thế giới tự nhiên. Chẳng hạn như ví dụ sau đây với Gerolamo Cardano đa tài (1501-76). Cardano là một nhà toán học tài năng, một thầy thuốc nổi tiếng, và một người chơi cờ bạc bất đắc dĩ. Vào năm 1545, ông đã cho xuất bản một trong những cuốn sách có ảnh hưởng lớn nhất trong lịch sử của đại số - *Ars Magna (Nghệ thuật vĩ đại)*. Trong chuyên luận toàn diện này, Cardano đã nghiên cứu tỉ mỉ việc giải các phương trình đại số, từ phương trình bậc hai đơn giản (trong đó biến số có số mũ cao nhất là 2: x^2) cho đến những lời giải tiên phong cho các phương trình bậc 3 (x^3) và bậc 4 (x^4). Tuy nhiên, trong toán học cổ điển các đại lượng thường được giải thích như là những yếu tố hình học. Chẳng hạn, giá trị của ẩn số x được đồng nhất với một đoạn thẳng có độ dài bằng thế, lũy thừa bậc hai x^2 khi đó sẽ là diện tích còn lũy thừa bậc ba x^3 là hình khối có thể tích tương ứng. Do đó, trong chương đầu tiên của cuốn *Ars Magna*, Cardano đã giải thích:

> Chúng tôi xin kết luận sự xem xét chi tiết của chúng tôi về bậc ba, những thứ khác chỉ đơn thuần được đề cập đến, thậm chí nói chung là bỏ qua. Vì *positio* [bậc nhất] có liên quan đến đường thẳng, *quadratum* [bậc hai] liên quan đến mặt phẳng và *cubum* [bậc ba] liên quan đến vật rắn, nên sẽ là ngốc nghếch nếu chúng ta vượt quá điểm này. Tự nhiên không cho phép điều đó. Vì vậy, như sẽ thấy, tất cả mọi thứ dưới và bằng bậc ba đều được chứng minh một cách đầy đủ, song những thứ khác mà chúng ta thêm vào, hoặc là do cần thiết hoặc là do tò mò, thì chúng ta cũng không thể đi quá cái giới hạn vừa vạch ra đó.

Nói cách khác, Cardano biện luận rằng vì thế giới tự nhiên được cảm nhận bởi các giác quan của chúng ta chỉ có 3 chiều, nên sẽ là ngốc nghếch khi các nhà toán học lại bận tâm đến số chiều cao hơn hay các phương trình bậc cao hơn.

Một ý kiến tương tự cũng được đưa ra bởi nhà toán học Anh John Wallis (1616-1703), mà Newton đã học được phương pháp phân tích từ tác phẩm *Arithmetica Infinitorum* của ông. Trong một cuốn sách quan trọng khác, cuốn *Chuyên luận về Đại số học*, Wallis lần đầu tiên đã tuyên bố: "Tự nhiên, nói một cách đúng mực, không thừa nhận có hơn *ba* chiều". Sau đó ông còn nói thêm rõ hơn:

> Một đường được vẽ thêm vào một đường sẽ tạo nên một mặt phẳng hay một bề mặt; bề mặt này lại được vẽ thêm vào một đường sẽ tạo nên một hình khối. Nhưng nếu hình khối này được vẽ thêm vào một đường, hay một mặt phẳng được vẽ thêm mặt phẳng khác thì sẽ

> tạo thành cái gì? Một mặt phẳng-mặt phẳng ư? Đây quả là mỏi con quái vật trong tự nhiên, và thậm chí còn khó chấp nhận hơn con *Chimera* [con quái vật thở ra lửa trong thần thoại Hy Lạp, là mỏt sự kết hợp giữa rắn, sư tử và dê] hay một con *Nhân Mã* [con vật trong thần thoại Hy Lạp, co phần trên là người và cơ thể và chân là ngựa]. Vì chiều dài, chiều rộng và chiều cao tạo nên toàn bộ *Không gian*. Cả trí tưởng tượng của chúng ta cũng không hình dung nổi làm thê nào lại có được Chiều thứ tư ngoài Ba chiều này.

Một lần nữa, lôgic của Wallis ở đây thật rõ ràng: không thể có chuyện ngay cả trong tưởng tượng một hình học lại không mô tả được không gian thực.

Những quan điểm rồi cuối cùng cũng bắt đầu thay đổi. Các nhà toán học ở thế kỷ 18 là những người đầu tiên xem thời gian là mỏt chiều thứ tư tiềm năng. Trong một bài báo nhan đề "Chiều", được công bố năm 1754, nhà vật lý Jean D'Alembert (1717-83) đã viết:

> Tôi đã tuyên bố ở trên rằng không thể hình dung được có nhiều hơn ba chiều. Tuy nhiên, một người có tài, người quen của tôi, đã khẳng định rằng người ta có thể coi thời gian như là một chiều thứ tư, và rằng tích của thời gian với tính hình khối, theo một cách nào đó, là tích của bốn chiều. Ý tưởng này có thể là thách thức song dường như với tôi nó có giá trị nhất định chứ không phải chỉ là sự mới lạ.

Nhà toán học vĩ đại Joseph Lagrange thậm chí còn tiến một bước xa hơn, ông tuyên bố khẳng định hơn vào năm 1797:

> Vì vị trí của một điểm trong không gian phụ thuộc vào ba tọa độ vuông góc, nên các tọa độ này trong một bài toán cơ học được hiểu như là một hàm số của t [thời gian]. Vì vậy, chúng ta có thể coi cơ học như là một hình học bốn chiều, và cơ học giải tích như là sự mở rộng của hình học giải tích.

Những ý tưởng táo bạo này đã mở toang cánh cửa cho sự mở rộng toán học mà trước đây được xem như là không thể tưởng tượng nổi - các loại hình học với số chiều bất kỳ - và hoàn toàn không cần đếm xỉa đến câu hỏi liệu những hình học này có mối liên hệ nào với không gian tự nhiên hay không.

Kant có thể đã sai khi tin rằng các giác quan cảm nhận không gian của chúng ta chỉ theo các khuôn mẫu Euclid, nhưng lại không hề nghi vấn rằng sự tri giác của chúng ta vận hành một cách tự nhiên và trực giác nhất chỉ trong không gian không nhiều hơn ba chiều. Chúng ta tương đối dễ dàng hình dung thế giới ba chiều của chúng ta trông như thế nào trong vũ trụ hai chiều của những cái bóng của Plato, nhưng việc vượt quá ba đến số chiều cao hơn nữa thì thực sự phải đòi hỏi trí tưởng tượng của các nhà toán học.

Một số công trình đột phá trong việc xử lý *hình học n-chiều* - hình học với số chiều bất kỳ - đã được thực hiện bởi Hermann Gÿnther Grassmann (1809-77). Grassmann, một trong 12 người con và bản thân ông cũng là cha của 11 đứa trẻ, là một giáo

viên phổ thông nhưng chưa bao giờ được đào tạo toán học ở bất kỳ trường đại học nào. Trong suốt cuộc đời mình, ông đã nhận được sự ca ngợi cho những công trình của ông trong lĩnh vực ngôn ngữ (đặc biệt là những nghiên cứu của ông về chữ Phạn và chữ Gothic) nhiều hơn là những thành tựu của ông trong lĩnh vực toán học. Một trong những người viết tiểu sử về ông đã viết: "Dường như số mệnh của Grassmann là cần phải được tái khám phá lại nhiều lần, mỗi một lần như thể ông sắp thực sự bị quên lãng kể từ khi ông qua đời". Tuy nhiên, Grassmann chính là người đã sáng tạo nên khoa học trừu tượng về "không gian," mà trong đó hình học thông thường chỉ là một trường hợp đặc biệt. Grassmann đã công bố những ý tưởng tiên phong của mình (khởi nguồn cho một nhánh toán học có tên là *đại số tuyến tính*) vào năm 1844, trong một cuốn sách thường được gọi là *Ausdehnungslehre* (có nghĩa là *Lý thuyết về sự mở rộng*; còn tên đầy đủ là *Lý thuyết mở rộng tuyến tính: Một nhánh mới của toán học*).

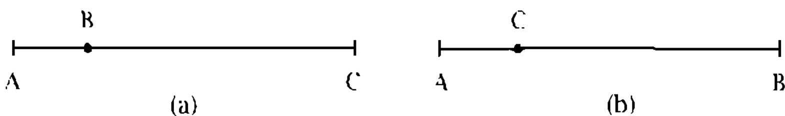
Trong lời nói đầu của cuốn sách, Grassmann đã viết: "Hình học không thể nào được xem xét... như là một nhánh của toán học; thay vì thế, hình học liên quan đến cái gì đó thực sự đã có trong tự nhiên, mà cụ thể là không gian. Tôi cũng đã nhận thấy rằng phải có một nhánh toán học, mà bằng một cách thuần túy trừu tượng, sản xuất ra những định luật tương tự như các định luật của hình học".

Đây là một quan điểm mới hoàn toàn về bản chất của toán học. Với Grassmann, hình học truyền thống - di sản của những người cổ Hy Lạp - nghiên cứu không gian tự nhiên và vì vậy không thể được xem như là một nhánh thực sự của toán học trừu tượng được. Toán học với ông là một cấu trúc trừu tượng

của bộ não con người, nó không nhất thiết phải có bất kỳ ứng dung nào vào thế giới thực.

Thật thú vị khi đi theo dong suy nghĩ bề ngoài có vẻ như tầm thường đã đưa Grassmann trên con đường dẫn tới lý thuyết của ông về đại số hình học. Ông đã bắt đầu với công thức đơn giản AB+BC=AC, điều này xuất hiện trong bất kỳ cuốn sách hình học nào nói về chiều dài của các đoạn thẳng (xem H. 46a). Tuy nhiên, ở đây, Grassmann đã nhận thấy có điều gì đó thú vị. Ông khám phá ra rằng công thức này vẫn đúng bất kể thứ tự của các điểm A, B, C chừng nào người ta không giải thích AB, BC và v.v. chỉ là các độ dài, mà còn gán cho chúng một "hướng", sao cho BA = - AB. Chẳng hạn, nếu C nằm giữa A và B (như H. 46b), thì AB = AC + CB, nhưng vì CB = - BC nên AB = AC - BC và bằng cách cộng BC vào cả hai vế ta sẽ tìm lại được công thức ban đầu AB + BC = AC.

Bản thân điều này đã rất thú vị, song sự mở rộng của Grassmann thậm chí còn chứa đựng nhiều điều ngạc nhiên hơn. Lưu ý rằng nếu chúng ta làm việc với đại số thay vì hình học thì một biểu thức như AB thường được ký hiệu là tích A × B. Trong trường hợp đó, giả thiết của Grassmann BA = - AB sẽ trái với một trong những luật bất khả xâm phạm của số học: hai đại lượng nhân với nhau sẽ cho cùng một kết quả bất kể thứ tự các đại lượng đó là như thế nào. Grassmann đã đối mặt với khả



Hình 46

năng rắc rối này và đã phát minh ra một đại số nhất quán mới (được gọi là *đại số ngoài*) bao gồm cả một vài quá trình nhân và đồng thời có thể xử lý được hình học với số chiều bất kỳ.

Đến những năm 1960, hình học *n*-chiều mới lan rộng như nấm sau mưa. Không chỉ bài thuyết trình có ảnh hưởng mạnh mẽ của Riemann mới xác lập được các không gian có độ cong bất kỳ và có số chiều tùy ý như là một lĩnh vực nghiên cứu cơ bản, mà các nhà toán học khác như Arthur Cayley và James Sylvester ở Anh, Ludwig Schläfli ở Thụy sỹ cũng bổ sung những đóng góp độc đáo của riêng họ vào lĩnh vực này. Các nhà toán học bắt đầu cảm thấy rằng họ đang được giải phóng khỏi những hạn chế mà trong nhiều thế kỷ đã trói buộc toán học chỉ vào những khái niệm không gian và số. Những sự trói buộc này rất nghiêm trọng về mặt lịch sử đến mức tới tận thế kỷ 18, nhà toán học có sức sáng tạo dồi dào người Thụy sỹ là Leonhard Euler (1707-83) đã phải thốt lên rằng "toán học, nói chung, là một khoa học về lượng; hay, khoa học nghiên cứu các phương tiện để đo lường các lượng". Chỉ đến thế kỷ 19 thì ngọn gió thay đổi mới bắt đầu thổi.

Thứ nhất, sự đưa vào các không gian hình học trừu tượng và khái niệm vô hạn (cả trong hình học và lý thuyết tập hợp) đã làm mờ nhạt đi ý nghĩa của "lượng" và "đo lường" đến mức khó tưởng tượng. Thứ hai, những nghiên cứu toán học trừu tượng được nhân lên rất nhanh chóng đã giúp cho việc tách biệt toán học ra xa hơn nữa với thực tại vật lý, trong khi đó lại thổi sức sống và "tồn tại" vào chính những trừu tượng hoá đó.

Georg Cantor (1845-1918), người sáng tạo ra *lý thuyết tập hợp*, đã đặc trưng cho tinh thần tự do mới được tìm thấy của toán học bằng "bản tuyên ngôn độc lập" sau: "Toán học đang

trong giai đoạn phát triển tự do của mình và chỉ bị ràng buộc trong sự tôn trọng hiển nhiên rằng các khái niệm của nó phải vừa nhất quán với nhau vừa ở trong mối quan hệ chính xác, theo định nghĩa, với những khái niệm đã được đưa vào trước đó, đã được xác lập và sử dụng." Nhà đại số Richard Dedekind (1831-1916) sáu năm sau đã bổ sung thêm: "Tôi coi khái niệm số hoàn toàn độc lập với các quan niệm hay trực giác về không gian và thời gian... Số là những sáng tạo tự do của trí tuệ con người". Như vậy, cả Cantor và Dedekin đều xem toán học như một sự nghiên cứu có tính khái niệm và trừu tượng, chỉ bị giới hạn bởi yêu cầu về tính nhất quán, và không có bất cứ nghĩa vụ nào liên quan đến việc tính toán hay ngôn ngữ của thực tại vật lý. Như Cantor đã tổng kết: "*Bản chất của toán học* hoàn toàn nằm ở sự *tự do* của nó".

Vào cuối thế kỷ 19, hầu hết các nhà toán học đều thừa nhận quan điểm của Cantor và Dedekind về sự tự do của toán học. Mục tiêu của toán học đã thay đổi từ việc tìm kiếm các chân lý về tự nhiên sang việc xây dựng các cấu trúc trừu tượng - tức hệ thống các tiên đề - và đi tìm tất cả các hệ quả lôgic của các tiên đề đó.

Người ta có thể đã nghĩ rằng điều này sẽ đặt dấu chấm hết cho mọi trăn trở về câu hỏi: toán học đã được khám phá hay là phát minh ra. Nếu toán học không là gì khác hơn là một trò chơi, dẫu là một trò chơi phức tạp, được chơi theo các quy tắc được phát minh ra một cách tùy ý, thì rõ ràng là không có điểm nào để tin vào tính xác thực của các khái niệm toán học, lẽ nào không phải thế?

Thật đáng ngạc nhiên, sự tách rời khỏi thực tại vật lý lại truyền cho một số nhà toán học cảm xúc ngược lại. Thay vì kết

luận rằng toán học là sự phát minh của con người, họ quay trở lại quan niệm ban đầu của trường phái Plato về toán học xem đó là một thế giới độc lập của chân lý, mà sự tồn tại của nó là có thực như vũ trụ vật lý vậy. Những nỗ lực liên kết toán học với vật lý được thực hiện bởi những " tân môn đệ của Plato" này như là sự học đòi làm toán học *ứng dụng*, trái ngược với thứ toán học thuần túy được cho là hoàn toàn không dính dáng với bất kỳ thứ gì là có tính chất vật lý. Dưới đây là những gì mà nhà toán học người Pháp Charles Hermite (1822-1901) viết trong bức thư gửi nhà toán học Hà Lan Thomas Joannes Stieltjes (1856-94) đề ngày 13 tháng 5 năm 1894: "Bạn thân mến của tôi", ông viết:

> Tôi rất hạnh phúc khi thấy anh sẵn sàng thay đổi bản thân thành một nhà tự nhiên học để quan sát các hiện tượng của thế giới số học. Học thuyết của anh cũng giống như của tôi; tôi tin rằng những con số và các hàm số của giải tích không phải là những sản phẩm tùy tiện của trí tuệ chúng ta; tôi nghĩ rằng chúng tồn tại bên ngoài chúng ta với cùng những đặc tính thiết yếu như những đối tượng của thực tại khách quan, và rằng chúng ta bắt gặp chúng hay khám phá ra chúng, và nghiên cứu chúng, đúng như các nhà vật lý, hóa học và động vật học mà thôi.

Nhà toán học người Anh G.H.Hardy, bản thân là người hành nghề toán học thuần túy, là một trong những nhà theo trường phái Plato hiện đại trực tính nhất. Trong một bài nói chuyện hùng hồn trước Hội vì tiến bộ khoa học Anh vào ngày 7 tháng 9 năm 1922, ông đã tuyên bố:

> Các nhà toán học đã xây dựng được một số lượng rất lớn các hệ thống hình học khác nhau. Euclid hay phi Euclid, với một, hai, ba hay số chiều bất kỳ. Tất cả các hệ thống này đều hoàn chỉnh và có giá trị như nhau. Chúng là hiện thân những kết quả mà các nhà toán học thu được khi quan sát thực tại của họ, một thực tại mạnh mẽ và vững chắc hơn nhiều so với thực tại mơ hồ và khó nắm bắt của vật lý học... Vì vậy, chức năng của một nhà toán học đơn giản là quan sát những sự kiện về chính hệ thống vững chắc và phức tạp đó của thực tại, sự phức hợp đẹp đẽ một cách đáng kinh ngạc của các mối quan hệ lôgic tạo nên đối tượng của khoa học của anh ta, như thể anh ta là một người thám hiểm nhìn về một dãy núi ở phía xa và ghi lại những kết quả quan sát của mình trên một chuỗi những tấm bản đồ, mà mỗi tấm là một nhánh của toán học thuần túy.

Rõ ràng là, ngay cả với những bằng chứng đương đại chỉ rõ bản chất tùy tiện của toán học, những môn đệ cực đoan của Plato vẫn không định buông vũ khí xuống. Hoàn toàn ngược lại, họ tìm thấy cơ hội để đào sâu vào, theo cách nói của Hardy, "thực tại của họ", thậm chí còn cảm thấy hưng phấn hơn là tiếp tục nghiên cứu những ràng buộc với thực tại vật lý. Tuy nhiên, bất chấp các quan điểm về thực tại siêu hình của toán học, có một điều đã trở nên rõ ràng. Ngay cả với sự tự do tưởng như không bị kiểm soát của toán học thì vẫn có một sự ràng buộc không thay đổi và không thể lay chuyển - đó là ràng buộc của sự nhất quán về lôgic. Các nhà toán học và triết học hơn bao giờ hết đã trở nên ý thức được rằng sợi dây rốn giữa toán học và lôgic là không thể bị cắt đứt. Điều này đã làm nảy sinh một

ý tưởng khác: Liệu toàn bộ toán học có thể được xây dựng dựa trên một nền tảng lôgic duy nhất không? Và nếu như có thể thì đó có phải là bí mật của tính hiệu quả của toán học hay không? Hay ngược lại, liệu các phương pháp toán học có thể được sử dụng để nghiên cứu sự suy lý nói chung không? Trong trường hợp đó, toán học sẽ trở thành ngôn ngữ không chỉ của tự nhiên mà còn là ngôn ngữ của tư duy con người.

CHƯƠNG 7

CÁC NHÀ LÔGIC: TƯ DUY VỀ SUY LUẬN

Tấm bảng hiệu treo bên ngoài một cửa hiệu cắt tóc ở một ngôi làng viết: "Tôi chỉ cạo râu cho những người đàn ông trong làng không tự cạo được cho mình." Nghe ra có vẻ rất hợp lý, phải không? Rõ ràng là những người đàn ông tự cạo được râu cho mình thì không cần tới dịch vụ cạo râu và lẽ tự nhiên là người thợ cắt tóc chỉ cạo râu cho tất cả những người còn lại. Nhưng, bạn có thể tự hỏi, vậy thì ai sẽ cạo râu cho người thợ cắt tóc? Nếu ông ta tự cạo cho mình thì theo quy định của cửa hiệu, ông ta nằm trong số những người ông ta không được cạo. Mặt khác, nếu ông ta không cạo được cho mình thì một lần nữa theo tấm bảng hiệu, ông ta phải thuộc số những người ông ta sẽ được cạo! Vậy ông ấy sẽ cạo hay không cạo cho mình? Những vấn đề nhỏ hơn nhiều, về mặt lịch sử, cũng đã gây ra những cuộc cãi lộn nghiêm trọng trong gia đình. Nghịch lý trên đã được đưa ra bởi Bertrand Russell (1872-1970), một trong những nhà lôgic và triết học kiệt xuất thế kỷ 20, đơn giản là để chứng minh rằng trực giác về lôgic của con người rất dễ mắc sai lầm. Các nghịch lý phản ánh những tình huống mà trong đó những giả thiết bề ngoài có thể chấp nhận được nhưng lại dẫn đến những

kết luận không thể chấp nhận được. Trong ví dụ ở trên, người thợ cạo vừa được cạo và vừa không được cạo cho mình. Vậy nghịch lý cụ thể này liệu có thể giải quyết được không? Một giải pháp khả dĩ cho nghịch lý này, như được trình bày một cách chặt chẽ ở trên, là rất đơn giản: người thợ cạo đó là một phụ nữ! Trái lại, nếu chúng ta biết trước rằng người thợ cạo đó phải là đàn ông, thì cái kết luận vô lý chẳng qua là kết quả của việc chấp nhận giả thiết ngay từ đầu. Nói cách khác, một thợ cạo như vậy đơn giản là không thể tồn tại. Nhưng chuyện này thì có liên quan gì đến toán học? Hóa ra toán học và lôgic có quan hệ mật thiết với nhau. Dưới đây là sự mô tả về mối liên kết này của chính Russell:

> Toán học và lôgic, nói về mặt lịch sử, là những nghiên cứu hoàn toàn riêng biệt. Toán học gắn với khoa học, lôgic gắn với tiếng Hy Lạp. Nhưng cả hai đều đã phát triển ở thời hiện đại: lôgic đã trở nên toán học hơn và toán học thì trở nên lôgic hơn. Hệ quả là giờ đây [1919] hoàn toàn không thể vẽ được vạch ranh giới giữa hai lĩnh vực đó; và thực tế thì hai là một. Chúng khác nhau như đứa con trai và người đàn ông: lôgic là tuổi trẻ của toán học và toán học là tuổi trưởng thành của lôgic.

Russell hàm ý ở đây rằng, phần lớn thì *toán học có thể được quy về lôgic*. Nói cách khác, những khái niệm cơ bản của toán học, thậm chí cả những đối tượng như các con số, thực tế đều có thể được định nghĩa thông qua các luật cơ bản của luận lý. Hơn nữa, sau đó Russell còn lập luận rằng có thể sử dụng những định nghĩa đó kết hợp với các nguyên lý lôgic để sinh ra những định lý toán học.

Ban đầu, quan điểm này về bản chất của toán học (được gọi là *lôgic luận*) đã nhận được sự tán thưởng của cả những người xem toán học không gì khác hơn là một trò chơi tinh vi, do con người phát minh ra (*người theo chủ nghĩa hình thức*), lẫn những người theo trường phái Plato đầy rắc rối. Nhóm đầu tiên ban đầu vui mừng khi thấy một tập hợp những "trò chơi" có vẻ như không liên quan gì với nhau lại hợp nhất thành một "mẹ của mọi trò chơi". Còn nhóm sau nhìn thấy tia hy vọng trong ý tưởng rằng toàn bộ toán học đều có thể đã xuất phát từ cùng một nguồn rõ ràng. Trong mắt của các nhà Platonic, điều này đã làm tăng xác suất của một nguồn gốc siêu hình duy nhất. Khỏi cần phải nói, một nguồn gốc duy nhất của toán học không thể không, ít nhất là về nguyên tắc, đồng nhất với nguyên nhân tạo ra sức mạnh của nó.

Để cho đầy đủ, tôi cũng phải lưu ý rằng có một trường phái tư duy - gọi là *trực giác luận* - trái ngược hoàn toàn với cả lôgic luận và hình thức luận. Người giơ cao bó đuốc của trường phái này là một nhà toán học Hà Lan khá cuồng tín Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966). Brouwer tin rằng các số tự nhiên có được từ trực giác của con người về thời gian và về những thời điểm rời rạc trong kinh nghiệm của chúng ta. Với ông, không có chuyện toán học là kết quả của tư duy con người, và vì vậy ông thấy không cần những luật lôgic phổ quát loại mà Russell hình dung. Tuy nhiên, Brouwer còn đi xa hơn nhiều và ông tuyên bố rằng những thực thể toán học duy nhất có ý nghĩa là những thực thể xây dựng một cách tường minh dựa trên các số tự nhiên, bằng cách sử dụng một số hữu hạn các bước. Do đó, ông đã loại bỏ những phần lớn của toán học mà đối với chúng các chứng minh có tính kiến thiết là không thể. Một khái niệm

lôgic khác bị Brouwer phủ nhận là *nguyên lý bài trung* - quy định rằng mọi mệnh đề chỉ có thể là đúng hoặc sai. Thay vì thế, ông cho phép các mệnh đề nấn ná ở trạng thái lơ lửng thứ ba mà trong đó chúng "chưa được quyết định". Chính những mệnh đề này, và một số ít những ràng buộc giới hạn của trực giác luận phần nào đã làm mất giá trị của trường phái tư duy này. Tuy nhiên, các ý tưởng của trực giác luận cũng đã dự đoán trước được một số phát hiện của các nhà khoa học về nhận thức liên quan đến câu hỏi con người thực sự có được tri thức toán học như thế nào (một chủ đề sẽ được đề cập đến trong Chương 9), và họ cũng đã thông tin cho biết những cuộc tranh luận của một số nhà triết học hiện đại của toán học (như Michael Dummett). Sự tiếp cận của Dummett về cơ bản là ngôn ngữ, khi tuyên bố một cách mạnh mẽ rằng "ý nghĩa của một mệnh đề toán học xác định và được xác định một cách thấu đáo bằng việc *sử dụng* nó."

Nhưng một mối quan hệ chặt chẽ như vậy giữa toán học và lôgic đã được phát triển như thế nào? Và cái chương trình lôgic luận ấy liệu có là khả thi? Dưới đây tôi sẽ tổng quan lại một cách ngắn gọn một số cột mốc quan trọng của bốn thế kỷ gần đây.

Lôgic học và Toán học

Về mặt truyền thống, lôgic học nghiên cứu các mối quan hệ giữa những khái niệm và các mệnh đề cùng với những quá trình mà nhờ đó các suy luận đúng có thể được đúc rút ra từ những mối quan hệ đó. Một ví dụ đơn giản, những suy luận có dạng tổng quát "mọi X là Y, một số Z là X; vậy một số Z là Y" được xây

dựng để đảm bảo một cách tự động sự đúng đắn của kết luận chừng nào mà các giả thiết là đúng. Chẳng hạn, "mọi nhà viết tiểu sử là một tác giả; một số nhà chính trị là nhà viết tiểu sử; vậy một số nhà chính trị là tác giả" tạo ra một kết luận đúng. Trái lại, suy luận có dạng tổng quát "mọi X là Y, một số Z là Y; vậy một số Z là X" là không đúng, vì người ta có thể tìm ra ví dụ trong đó mặc dù giả thiết là đúng nhưng kết luận lại sai. Ví dụ: "mọi người là động vật có vú; một số động vật có sừng là động vật có vú; vậy một số động vật có sừng là người."

Chừng nào một số quy tắc được tuân theo thì sự đúng đắn của một lập luận không phụ thuộc vào đối tượng của các mệnh đề. Chẳng hạn:

> Hoặc người quản gia đã giết chết nhà triệu phú hoặc con gái ông ta giết chết ông ta;
>
> Con gái ông ta không giết chết ông ta;
>
> Vậy, người quản gia đã giết chết nhà triệu phú.

Là một suy diễn đúng. Tính hợp lý của lập luận này hoàn toàn không dựa vào quan điểm của chúng ta về người quản gia hoặc vào mối quan hệ giữa nhà triệu phú và con gái của ông ta. Sự đúng đắn ở đây được đảm bảo bởi thực tế là các mệnh đề có dạng tổng quát "nếu p hoặc q, và không q thì p" đã tạo ra một chân lý lôgic.

Bạn có thể nhận thấy rằng trong hai ví dụ đầu tiên, X, Y và Z đóng vai trò rất giống với các biến số trong các phương trình toán học - chúng đánh dấu vị trí mà các biểu thức có thể được thay thế vào, tương tự như các giá trị số được thay cho các biến số trong đại số. Tương tự như vậy, tính chân lý trong suy

luận "nếu p hoặc q, và không q thì p" gợi nhớ đến các tiên đề trong hình học Euclid. Tuy nhiên, phải mất gần hai thiên niên kỷ chiêm nghiệm lôgic, các nhà toán học mới để tâm nhiều đến sự tương tự này.

Người đầu tiên thử kết hợp hai lĩnh vực lôgic và toán học thành một thứ "toán học phổ quát" là nhà toán học và triết học duy lý người Đức Gottfried Wilheim Leibniz (1646-1716). Leibniz, người được đào tạo chính quy về luật, nhưng làm hầu hết những công trình của ông về toán học, vật lý và triết học vào thời gian rảnh rỗi. Trong suốt cuộc đời mình, ông nổi tiếng nhất vì đã xây dựng một cách độc lập (và gần như đồng thời) với Newton những nền tảng của phép tính vi tích phân (và cũng vì sự tranh cãi gay gắt về quyền tác giả giữa hai người). Trong một bài tiểu luận được hình thành gần như hoàn toàn ở tuổi 16, Leibniz đã suy xét đến một ngôn ngữ phổ quát của suy luận, hay *characteristica universalis*, mà ông coi như là công cụ tư duy tối hậu. Kế hoạch của ông là biểu diễn những ý niệm và các ý tưởng đơn giản bằng các ký hiệu, các ý niệm và ý tưởng phức tạp hơn bằng những tổ hợp thích hợp của các ký hiệu cơ bản đó. Leibniz hy vọng có thể tính toán được một cách thực sự giá trị chân lý của một mệnh đề bất kỳ, trong bất cứ lĩnh vực khoa học nào mà chỉ bằng các phép tính đại số. Ông tiên đoán rằng với các phép tính lôgic thích hợp, những tranh cãi trong triết học sẽ được giải quyết bằng tính toán. Thật không may là Leibniz đã không tiến được xa trong việc phát triển thực sự đại số học lôgic của mình. Ngoài nguyên lý chung về một cuốn "sách vỡ lòng về tư duy", hai đóng góp chủ yếu của ông, đó là phát biểu một cách rõ ràng khi nào chúng ta cần phải xem hai điều là tương đương và sự nhận biết phần nào rõ

ràng rằng không có mệnh đề nào lại đồng thời vừa đúng vừa sai. Do đó, mặc dù thậm chí những ý tưởng của Leibniz là rất lỗi lạc song chúng gần như hoàn toàn không được chú ý tới.

Lôgic lại trở nên thịnh hành hơn một lần nữa vào giữa thế kỷ 19, và sự đột phát quan tâm trở lại này đã tạo ra những tác phẩm quan trọng, mà đầu tiên là của Augustus De Morgan (1806-71) và sau đó là George Boole (1815-64), Gottlob Frege (1848-1925) và Giuseppe Peano (1858-1932).

De Morgan là một nhà văn viết nhiều một cách phi thường, người đã thực sự công bố tới hàng ngàn bài báo và cuốn sách thuộc nhiều chủ đề khác nhau về toán học, lịch sử toán học và triết học. Hai tác phẩm khác thường hơn của ông là cuốn almanac (sách lịch) về trăng tròn (trong cả thiên niên kỷ) và cuốn toát yếu những loại toán học lạ thường. Khi có lần được hỏi tuổi, ông đã trả lời: "Tôi x tuổi vào năm x^2". Bạn có thể dễ dàng kiểm tra số duy nhất, mà khi bình phương lên cho một số nằm trong khoảng từ 1806 đến 1871 (năm sinh và năm mất của De Morgan) là 43. Những đóng góp độc đáo nhất của Morgan có lẽ vẫn là trong lôgic học, lĩnh vực mà ông vừa mở rộng một cách đáng kể phạm vi các phép tam đoạn luận của Aristotle vừa thử lại cách tiếp cận đại số đối với suy luận. De Morgan xem xét lôgic bằng con mắt của một nhà đại số và xem xét đại số bằng con mắt của một nhà lôgic. Ở một trong những bài báo của mình, ông đã trình bày quan điểm nhìn xa trông rộng này: "Với đại số thì chúng ta phải tìm kiếm công dụng quen thuộc nhất của các hình thái lôgic... nhà đại số học đã sống trong bầu không khí cao hơn của tam đoạn luận, sự kết cấu không ngừng của mối quan hệ, trước khi nó được thừa nhận rằng có một bầu không khí như thế tồn tại."

Một trong những đóng góp quan trọng nhất của De Morgan với lôgic được biết là sự *lượng từ hóa vị từ*. Đây phần nào là một cái tên hơi khủng đối với cái mà người ta có thể xem như một sự bỏ sót đáng ngạc nhiên về phần đóng góp của các nhà lôgic thời kỳ cổ điển. Các môn đệ của Aristotle đã nhận thấy rất đúng rằng từ các giả thiết như "một số *Z* là *X*" và "một số *Z* là *Y*", không thể rút ra kết luận tất yếu nào về mối quan hệ giữa *X* và *Y*. Chẳng hạn, hai câu "một số người ăn bánh mỳ" và "một số người ăn táo" không cho phép đưa ra một kết luận dứt khoát nào về mối quan hệ giữa người ăn tao và người ăn bánh mì. Cho đến tận thế kỷ 19, các nhà lôgic cũng cho rằng để mối quan hệ bất kỳ giữa *X* va *Y* là tất yếu, thì mệnh đề trung gian ("*Z*" ở trên) phải là "phổ quát" (thương gọi là lượng từ "với mọi") ở một trong các giả thiết. Tức là, câu đó phải có cụm từ "với mọi *Z*". De Morgan cho rằng giả định đó là sai. Trong cuốn *Lôgic hình thức* (xuất bản năm 1847), ông đã chỉ ra rằng từ các giả thiết như "hầu hết *Z* la *X*" và hầu hết "*Z* là *Y*" thì tất yếu sẽ suy ra "một số *X* là *Y*". Chẳng hạn, từ hai giả thiết "hầu hết mọi người đều ăn bánh mì" và "hầu hết moi người đều ăn táo" thì tất yếu suy ra "một số người ăn cả bánh mì và táo". De Morgan thậm chí còn đi xa hơn, ông đã đặt tam đoạn luận mới của mình dưới dang lượng từ chính xác. Hãy hình dung là: tổng số *Z* là *z*, số *Z* và cũng là *X* là *x*, số *Z* và cũng là *Y* là *y*. Trong ví dụ ở trên, tổng số người là 100 ($z = 100$), trong số đó có 57 người ăn bánh mì ($x = 57$) va 69 người ăn táo ($y = 69$). Sau đo, De Morgan nhận thấy, phải có ít nhất ($x + y - z$) của *X* cũng là của *Y*. Tức là ít nhất co 26 người ($57 + 69 - 100 = 26$) ăn cả banh mì và táo.

Không may là, phương pháp lượng từ hóa vị từ rất thông

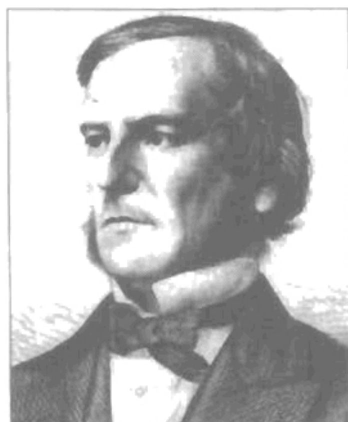
minh này lại kéo De Morgan vào những cuộc tranh cãi công khai không mấy vui vẻ. Nhà triết học người Scotland William Hamilton (1788-1856) - không nên nhầm với nhà toán học Ireland William Rowan Hamilton - đã lên án De Morgan là đạo văn, vì trước đó vài năm Hamilton đã công bố những ý tưởng phần nào có liên quan (nhưng thiếu chính xác hơn rất nhiều). Sự tấn công của Hamilton không đáng ngạc nhiên chút nào, căn cứ vào thái độ của ông nói chung đối với toán học và các nhà toán học. Ông đã từng nói: "Sự nghiên cứu quá mức về toán học sẽ làm hao tổn hoàn toàn năng lượng trí tuệ mà triết học và cuộc sống đòi hỏi". Sự náo loạn gây bởi những bức thư gay gắt hùa theo sự chỉ trích của Hamilton lại tạo ra một kết quả tích cực, hoàn toàn không định trước: nó đã dẫn dắt nhà đại số học George Boole đến với lôgic. Sau này Boole đã kể lại trong cuốn *Giải tích toán học của lôgic*:

> Mùa xuân năm nay, sự chú ý của tôi đã hướng vào vấn đề mà khi đó đã trở nên thôi thúc giữa Ngài W. Hamilton và giáo sư De Morgan; và tôi bị xui khiến bởi mối quan tâm mà vấn đề đó đã khơi gợi lên nhằm khôi phục lại cái đường dây của những đòi hỏi trước đây mà hầu như đã bị lãng quên. Dường như đối với tôi, mặc dù Lôgic có thể được xem như có liên quan đến ý tưởng về lượng, nhưng nó cũng còn có một hệ thống các quan hệ khác, sâu sắc hơn. Nếu là đúng luật khi xem nó từ *bên ngoài* như là sự kết nối chính nó thông qua trung gian là Số với những trực giác về Không gian và Thời gian, thì cũng sẽ là đúng luật khi xem nó từ *bên trong*, dựa trên những thực tế thuộc một trật tự khác nằm trong kết cấu của Trí tuệ.

Những từ ngữ khiêm tốn này mô tả sự bắt đầu của cái mà sau này trở thành một nỗ lực có ảnh hưởng sâu xa trong lôgic ký hiệu.

Các luật của tư duy

George Boole (H. 47) sinh ngày 2 tháng 11 năm 1815 tại thị trấn công nghiệp Lincoln, nước Anh. Cha ông, John Boole, là thợ đóng giày ở Lincoln, rất quan tâm đến toán học và cũng rất lành nghề trong việc chế tạo các dụng cụ quang học. Mẹ của Boole, Mary Ann Joyce, làm người hầu cho một bà lớn. Vì người cha không hoàn toàn chú tâm vào việc làm ăn chính của mình nên gia đình không được dư dả. George vào học một trường thương mại cho đến khi 7 tuổi, và sau đó học tại một trường tiểu học với một thầy giáo tên là John Walter Reeves. Là con trai nên Boole chủ yếu quan tâm tới tiếng Latin, do một người bán sách dạy cho, và tự học tiếng Hy Lạp. Năm 14 tuổi, ông đã thử dịch một bài thơ của nhà thơ Hy Lạp Meleager thế kỷ thứ nhất trước CN. Người cha của George rất lấy làm tự hào và đã cho đăng bản dịch này trên tờ *Lincoln Herald* - một hành động chọc tức một bài báo bộc lộ sự mất niềm tin của hiệu trưởng trường địa phương. Sự nghèo túng của gia đình đã buộc George Boole phải bắt đầu làm trợ giảng ngay ở tuổi 16. Trong suốt những năm tiếp theo, ông đã dành thời gian rảnh rỗi của mình để học tiếng Pháp, tiếng Italia và tiếng Đức. Sự hiểu biết về những ngôn ngữ hiện đại này đã tỏ ra là rất hữu dụng, vì nó cho phép ông biết tới những công trình vĩ đại của các nhà toán học như Sylvestre Lacroix, Laplace, Lagrange, Jacobi và



Hình 47

nhiều người khác. Tuy nhiên, thậm chí sau đó ông vẫn không thể tham dự các lớp chính quy về toán học, nhưng ông tiếp tục tự học, trong khi đồng thời lại phải giúp đỡ cha mẹ và các em bằng nghề dạy học của mình. Mặc dù vậy, tài năng toán học của con người tự học này rồi cũng đã bộc lộ, ông bắt đầu cho công bố hàng loạt các bài báo trên *Tạp chí Toán học Cambridge.*

Năm 1842, Boole bắt đầu liên lạc thường xuyên với De Morgan, người mà ông đã gửi các bài báo về toán học để xin ý kiến. Vì tiếng tăm của ông bắt đầu nổi như là một nhà toán học độc đáo, và lại được hậu thuẫn bởi sự tiến cử mạnh mẽ của De Morgan, năm 1849, Boole được mời làm giáo sư toán học của trường Queen's College, ở Cork, Ireland. Và ông liên tục giảng dạy ở đó trong suốt phần đời còn lại của mình. Năm 1855, Boole cưới Mary Everest (cháu gái của chuyên gia lập bản đồ địa hình George Everest, mà sau này một ngọn núi mang tên ông), kém ông 17 tuổi và vợ chồng ông có 5 đứa con gái. Boole mất sớm

ở tuổi 49. Vào một ngày mùa đông lạnh giá năm 1864, ông bị trúng mưa khi đang trên đường đến trường, nhưng ông vẫn cố đứng giảng bài trong bộ quần áo đã ướt sũng. Về nhà, có lẽ vợ ông đã làm cho tình hình trầm trọng hơn khi đổ xô nước lên giường theo sự mê tín lấy độc trị độc. Boole bị viêm phổi và mất ngày 8 tháng 12 năm 1864. Bertrand Russell không giấu được sự ngưỡng mộ của mình đối với con người tự học này: "Toán học thuần túy được khám phá bởi Boole, trong một tác phẩm mà ông đặt tên là *Các luật của tư duy* (1854)... Cuốn sách của ông thực tế là đề cập tới lôgic hình thức, và điều này chính là toán học." Đáng chú ý là lúc đó, cả Mary Boole (1832-1916) lẫn năm người con gái của Boole đều đạt được những thành công đáng kể trong các lĩnh vực từ giáo dục đến hóa học.

Boole cho xuất bản cuốn *Giải tích toán học về lôgic* vào năm 1847 và *Các luật của tư duy* năm 1854 (với tên đầy đủ là *Một khảo cứu về các luật của tư duy - cơ sở của các lý thuyết toán học về lôgic và xác suất*). Đây thực sự là những kiệt tác - cuốn sách đầu tiên đã đưa sự tương đồng giữa các phép tính lôgic và số học tiến một bước khổng lồ về phía trước. Boole đã thực sự biến lôgic thành một loại đại số (mà sau này được gọi là *đại số Boole*) và mở rộng sự phân tích lôgic thậm chí tới cả sự suy luận xác suất. Boole viết:

> Thiết kế của chuyên luận sau đây [Các luật của Tư duy] là nhằm khảo cứu những luật cơ bản của các thao tác của trí tuệ, những luật chi phối sự suy luận; nhằm biểu diễn những luật này bằng ngôn ngữ ký hiệu của giải tích, và trên cơ sở đó thiết lập một khoa học lôgic và phương pháp của nó; nhằm làm cho bản thân phương

pháp đó trở thành cơ sở của một phương pháp chung áp dụng cho lý thuyết toán học về xác suất; và cuối cùng là nhằm tập hợp từ những yếu tố khác nhau của chân lý để xem xét các thông tin có thể có liên quan đến bản chất và kết cấu của trí tuệ con người dựa trên các quy luật, phương pháp nêu trên.

Các phép tính toán của Boole có thể được giải thích hoặc là áp dụng cho quan hệ giữa *các lớp* (tập hợp các đối tượng hay phần tử) hoặc là ở bên trong lôgic các *mệnh đề*. Chẳng hạn, nếu x và y là các lớp, thì mối quan hệ như $x = y$ có nghĩa là hai lớp này chính xác có các phần tử như nhau, ngay cả khi các lớp này được định nghĩa một cách khác nhau. Ví dụ, nếu mọi đứa trẻ trong một trường học nào đó đều thấp hơn 2m, thì hai lớp được định nghĩa là x = "mọi học sinh trong trường" và y = "mọi học sinh trong trường đều thấp hơn 2m" là như nhau. Nếu x và y biểu diễn các mệnh đề thì khi $x = y$ có nghĩa là hai mệnh đề này là tương đương nhau (nghĩa là một mệnh đề là đúng nếu và chỉ nếu mệnh đề kia cũng đúng). Chẳng hạn, hai mệnh đề x = "John Barrymore là anh trai của Ethel Barrymore" và y = "Ethel Barrymore là em gái của John Barrymore" là tương đương. Ký hiệu " $x. y$" biểu diễn phần chung giữa hai lớp x và y (tức là các phần tử thuộc cả x và y), hay còn gọi là *hội* của các mệnh đề x và y (cũng tức là "x *và* y"). Chẳng hạn, nếu x là lớp tất cả các thằng ngốc trong làng và y là tất cả những người trong làng có tóc đen, thì $x. y$ là lớp tất cả các thằng ngốc trong làng có tóc đen. Với các mệnh đề x và y, hội ($x. y$) (hay dùng từ "và") có nghĩa là cả hai mệnh đề đều phải đúng. Chẳng hạn, khi Hiệp hội xe môtô nói rằng "bạn phải đỗ bài thi lý thuyết

và bài thi lại", thì điều này có nghĩa là bạn phải đáp ứng cả hai yêu cầu đó. Với Boole, hai lớp không có các phần tử chung, thì ký hiệu "*x* + *y*" biểu diễn lớp có cả các phần tử của *x* và các phần tử của *y*. Trong trường hợp các mệnh đề đó, "*x* + *y*" tương ứng với "hoặc x hoặc *y* chứ không cả hai". Chẳng hạn, nếu *x* là mệnh đề "cái chốt hình vuông" và *y* là "cái chốt hình tròn", thì *x* + *y* là "cái chốt hoặc vuông hoặc tròn". Tương tự như vậy "*x* - *y*" biểu diễn lớp các phần tử của *x* mà không phải là phần tử của *y*, hay mệnh đề "*x* nhưng không phải *y*". Boole ký hiệu lớp phổ quát (chứa mọi phần tử khả dĩ đang xét) bằng 1 và lớp trống hay lớp không (tức là không chứa bất kỳ phần tử nào) bằng 0. Lưu ý rằng lớp (hay tập hợp) trống hoàn toàn không giống số 0 - số 0 chỉ đơn giản là số các phần tử trong lớp trống mà thôi. Cũng cần lưu ý rằng lớp trống không phải đồng nhất với không có gì, vì một lớp không có gì trong nó vẫn là một lớp. Chẳng hạn, nếu mọi tờ báo ở Albania đều viết bằng tiếng Albania thì lớp mọi tờ báo viết bằng tiếng Albania sẽ được ký hiệu bằng 1 theo hệ thống ký hiệu của Boole, trong khi lớp báo viết bằng tiếng Tây Ban Nha ở Albania sẽ được ký hiệu bằng 0. Đối với các mệnh đề, thì 1 biểu thị cho mệnh đề *đúng* (ví dụ như: loài người ai cũng chết) và 0 biểu thị cho mệnh đề *sai* (ví dụ như: loài người là bất tử). Với những quy ước đó, Boole đã có thể phát biểu một tập hợp các tiên đề xác định đại số lôgic. Chẳng hạn, bạn có thể kiểm tra bằng cách sử dụng các định nghĩa ở trên, mệnh đề hiển nhiên đúng "mọi thứ hoặc là *x* hoặc là không phải *x*" có thể được viết trong đại số Boole như sau: $x + (1 - x) = 1$, điều này cũng đúng trong đại số thông thường. Tương tự như vậy, phát biểu nói rằng phần chung giữa một lớp bất kỳ và lớp trống là một lớp trống được

biểu thị bằng 0. $x = 0$, điều này cũng có nghĩa là hội của một mệnh đề bất kỳ với một mệnh đề sai cũng sẽ là sai. Chẳng hạn, mệnh đề hội "đường là ngọt và loài người là bất tử" tạo ra một mệnh đề sai mặc cho thực tế là phần đầu của nó là đúng. Cần lưu ý một lần nữa rằng, "đẳng thức" này trong đại số Boole cũng là đúng với các số đại số thông thường.

Để chứng tỏ sức mạnh các phương pháp của mình, Boole cố gắng sử dụng các ký hiệu lôgic cho mọi thứ mà ông cho là quan trọng. Chẳng hạn, ông thậm chí đã phân tích những lập luận của hai nhà triết học Samuel Clarke và Baruch Spinoza về sự tồn tại và những thuộc tính của Thượng đế. Tuy nhiên, kết luận của ông khá bi quan: "Tôi nghĩ là sẽ không thể có tiến bộ từ việc nghiên cứu kỹ những lập luận của Clarke và Spinoza mà không có một niềm tin sâu sắc về sự vô ích của tất cả những nỗ lực nhằm xác lập, một cách hoàn toàn *tiên nghiệm*, sự tồn tại của một đấng Thượng đế, những thuộc tính của Ngài và mối quan hệ của Ngài với vũ trụ." Mặc cho sự đúng đắn trong kết luận của Boole, nhưng rõ ràng là không phải mọi người đều bị thuyết phục về sự vô ích của những nỗ lực như vậy, vì các phiên bản cập nhật của những lập luận mang tính bản thể luận về sự tồn tại của Chúa vẫn tiếp tục sinh sôi cho đến ngày nay.

Nhìn chung, Boole cố gắng để chinh phục bằng toán học những liên từ lôgic như *and (và), or (hoặc), if (nếu)... then (thì),* và *not (không)*, mà hiện nay vẫn là trung tâm của những thao tác trong máy tính và các chuyển mạch khác nhau. Do đó, ông đã được nhiều người xem là một trong những "nhà tiên tri" của thời đại số hóa. Dù vậy, do bản chất tiên phong của nó, đại số Boole vẫn chưa hoàn thiện. Trước hết, Boole đã làm cho các công trình của mình có phần rối rắm và khó lĩnh hội do

sử dụng một hệ thống ký hiệu quá giống với các ký hiệu trong đại số thông thường. Thứ hai, Boole đã làm mờ nhòe sự khác biệt giữa các mệnh đề (ví dụ như "Aristotle không bất tử"), các hàm mệnh đề hay các vị từ (ví dụ "x không bất tử"), và các mệnh đề được lượng từ hóa (ví dụ như "với mọi x, x không bất tử"). Cuối cùng, Frege và Russell sau này cho rằng đại số học bắt nguồn từ lôgic. Do đó, người ta có thể biện luận rằng sẽ là có nghĩa hơn nếu như xây dựng đại số học dựa trên lôgic chứ không phải theo con đường nào khác.

Tuy nhiên, có một khía cạnh khác trong công trình của Boole sẽ trở nên rất thành công. Đó là sự nhận thức, về mối quan hệ chặt chẽ như thế nào giữa lôgic và khái niệm các *lớp* hay các *tập hợp*. Hãy nhớ lại là đại số Boole áp dụng tốt như nhau cho các lớp và các mệnh đề. Thực vậy, khi mọi phần tử của một tập hợp *X* cũng là các phần tử của tập hợp *Y* (tức *X* là một *tập con* của *Y*), thì thực tế này có thể được biểu diễn như một *phép kéo theo lôgic* có dạng "nếu *X* thì *Y*". Chẳng hạn, thực tế là tập hợp các con ngựa là tập con của tập hợp mọi động vật bốn chân có thể được viết dưới dạng một mệnh đề lôgic "Nếu *X* là ngựa thì nó là động vật bốn chân".

Đại số Boole của lôgic sau đó đã được mở rộng và hoàn thiện bởi nhiều nhà nghiên cứu, nhưng người có công khai thác một cách đầy đủ sự tương tự giữa các tập hợp và lôgic, và đã đưa toàn bộ khái niệm này tới một cấp độ hoàn toàn mới, đó là Gottlob Frege (H. 48).

Friedrich Ludwig Gottlob Frege sinh ra tại Wismar, nước Đức, nơi mà cả cha và mẹ ông đã từng là hiệu trưởng của một trường nữ trung học, vào những thời gian khác nhau. Ông theo học toán học, vật lý, hóa học và triết học, ban đầu tại Đại học



Hình 48

Jena và sau đó học thêm hai năm ở Đại học Göttingen. Sau khi tốt nghiệp, ông bắt đầu giảng dạy ở Jena vào năm 1874 và liên tục dạy toán ở trường này trong suốt sự nghiệp của mình. Mặc dù khối lượng giảng dạy rất lớn, nhưng Frege vẫn cố gắng cho xuất bản tác phẩm có tính cách mạng đầu tiên của mình về lôgic vào năm 1879. Tác phẩm có nhan đề *Chữ viết-khái niệm, một ngôn ngữ hình thức của tư duy thuần túy phỏng theo ngôn ngữ của số học* (thường được biết đến với cái tên *Begriffsschrift*). Trong tác phẩm này, Frege đã phát triển một ngôn ngữ lôgic, độc đáo, mà sau này ông đã mở rộng trong cuốn sách hai tập *Grundgesetze der Arithmetic (Các quy luật cơ bản của số học).* Dự tính của Frege trong lôgic học một mặt rất tập trung nhưng mặt khác cũng đầy tham vọng. Trong khi ông chú yếu tập trung vào số học, nhưng ông cũng muốn chứng tỏ rằng ngay cả những khái niệm quen thuộc như các số tự nhiên 1, 2, 3,..., cũng có thể được quy về các cấu trúc lôgic. Do đó, Frege tin

rằng người ta có thể chứng minh được tất cả các chân lý của số học chỉ xuất phát từ một số ít tiên đề trong lôgic. Nói cách khác, theo Frege, ngay cả những mệnh đề như 1 + 1 = 2 cũng không phải là các *chân lý kinh nghiệm*, dựa trên sự quan sát, mà thay vì, chúng có thể được rút ra từ một tập hợp các tiên đề lôgic. Cuốn *Begriffsschrift* của Frege có tầm ảnh hưởng lớn đến mức nhà lôgic cùng thời ông là Willard Van Orman Quine (1908-2000) đã từng viết: "Lôgic là một chủ đề cũ, nhưng kể từ năm 1879, nó đã là một chủ đề lớn".

Cốt lõi triết học Frege là sự khẳng định rằng chân lý là độc lập với sự phán xét của con người. Trong cuốn *Các luật cơ bản của số học*, ông viết: "Là đúng thì khác với được coi là đúng, bất kể là bởi một người, nhiều người hay tất cả mọi người, và trong bất cứ hoàn cảnh nào cũng không được quy về nó. Không hề có sự mâu thuẫn nào trong một điều gì đó là đúng nhưng lại bị mọi người coi là sai. Tôi hiểu "các luật lôgic" không phải bằng các quy luật tâm lý coi-là-đúng, mà là các luật của chân lý... chúng [các luật của chân lý] là những cột mốc ranh giới được đặt trong một nền tảng vĩnh cửu, mà tư duy của chúng ta có thể tràn qua nhưng không bao giờ làm dịch chuyển được."

Các tiên đề lôgic của Frege nhìn chung có dạng "với mọi... nếu... thì...". Chẳng hạn, một trong những tiên đề phát biểu: "với mọi *p*, nếu không- (không-*p*) thì *p*". Tiên đề này về cơ bản phát biểu rằng nếu một mệnh đề mâu thuẫn với một mệnh đề đang xét là sai, thì mệnh đề đang xét là đúng. Ví dụ, nếu bạn không dừng xe trước biển báo dừng là sai, thì bạn nhất thiết phải dừng xe trước biển báo dừng. Để thực sự phát triển một "ngôn ngữ" lôgic, Frege đã bổ sung vào tập hợp các tiên đề một đặc tính quan trọng mới. Ông đã thay thế phong cách

chủ vị truyền thống của lôgic cổ điển bằng những khái niệm vay mượn từ lý thuyết hàm của toán học. Tôi sẽ giải thích điều này một cách ngắn gọn. Khi viết các biểu thức toán học như: $f(x) = 3x + 1$, điều này có nghĩa là f là một hàm số với biến số là x và giá trị của hàm số có thể thu được bằng cách nhân giá trị của biến với 3 và sau đó cộng thêm 1. Frege đã định nghĩa cái mà ông gọi là *khái niệm* là hàm số. Chẳng hạn, giả sử bạn đang xét khái niệm "ăn thịt". Khái niệm này có thể được ký hiệu bằng một hàm "$F(x)$", và giá trị của hàm này sẽ là "đúng" nếu x = sư tử, và "sai" nếu x = hươu. Tương tự như vậy, đối với các số, khái niệm (hàm số) "nhỏ hơn 7" sẽ ánh xạ mọi số bằng hoặc lớn hơn 7 với "sai" và mọi số nhỏ hơn 7 với "đúng". Frege đã đề cập tới các đối tượng mà đối với nó một khái niệm nhất định sẽ cho giá trị "đúng" khi nó được "liệt vào" khái niệm đó.

Như tôi đã lưu ý ở trên, Frege tin chắc rằng mọi mệnh đề liên quan đến các số tự nhiên đều có thể biết được và rút ra được chỉ từ các định nghĩa và các luật lôgic. Do vậy, ông đã khởi đầu sự trình bày của mình về chủ đề số tự nhiên mà không đòi hỏi phải biết trước khái niệm "số". Chẳng hạn, trong ngôn ngữ lôgic của Frege, hai khái niệm được xem là *equinumerous* (tức là, có cùng con số gắn với chúng) nếu có một tương ứng 1-1 giữa các đối tượng được "liệt vào" một khái niệm và các đối tượng được "liệt vào" một khái niệm khác. Chẳng hạn, các nắp thùng rác thì *equinumerous* với các thùng rác (nếu như mỗi thùng rác đều có nắp), và định nghĩa này không đòi hỏi phải nhắc đến bất kỳ số nào. Sau đó, Frege đã đưa ra một định nghĩa lôgic tài tình về số 0. Hãy hình dung một khái niệm F được định nghĩa là "không đồng nhất với chính nó". Vì mọi đối tượng đều phải đồng nhất với chính mình, nên không có đối tượng nào được

liệt vào *F*. Nói cách khác, với mọi đối tượng x, *F(x)* = sai. Frege đã định nghĩa số zero quen thuộc như là "số của khái niệm *F*". Sau đó, ông tiếp tục định nghĩa tất cả các số tự nhiên thông qua các thực thể mà ông gọi là *các mở rộng*. Mở rộng một khái niệm là lớp của tất cả các đối tượng được liệt vào khái niệm đó. Mặc dù định nghĩa này có thể không phải là dễ dàng tiêu hóa đối với những người ngoại đạo, nhưng nó thực sự là đơn giản. Chẳng hạn, mở rộng của khái niệm "phụ nữ", là lớp của tất cả phụ nữ. Lưu ý rằng mở rộng của "phụ nữ" bản thân nó không phải là một phụ nữ.

Bạn có thể thắc mắc định nghĩa lôgic trừu tượng này làm thế nào giúp ta định nghĩa được, giả sử như, số 4. Theo Frege, số 4 là mở rộng (hay lớp) của tất cả các khái niệm có bốn đối tượng được liệt vào chúng. Ví dụ, khái niệm "là một chân của một con chó cụ thể có tên là Snoopy" là thuộc về lớp này (và vì vậy thuộc về số 4), cũng như khái niệm "là ông, bà của Gottlob Frege".

Chương trình của Frege là cực kỳ ấn tượng, song nó cũng vấp phải một số trở ngại nghiêm trọng. Một mặt, ý tưởng về việc sử dụng các khái niệm - nguồn sống của tư duy - để xây dựng số học, là một ý tưởng thực sự thiên tài. Nhưng mặt khác, Frege lại không phát hiện được một số điểm không nhất quán quan trọng trong hình thức luận của ông. Đặc biệt là một trong số các tiên đề của ông, được gọi là *Luật cơ bản* V, đã được chứng minh là sẽ dẫn tới mâu thuẫn và vì vậy mà nó là một sơ hở chí tử.

Bản thân luật này phát biểu khá ngây thơ rằng mở rộng của một khái niệm *F* là đồng nhất với mở rộng của khái niệm *G* khi và chỉ khi *F* và *G* có cùng các đối tượng được liệt vào chúng.


Hình 49

Nhưng một quả bom đã được thả xuống vào ngày 16 tháng 6 năm 1902, khi Bertrand Russell (H. 49) viết một lá thư gửi cho Frege, trong đó chỉ ra một nghịch lý chứng tỏ Luật cơ bản V là không nhất quán. Cứ như thể đã được số phận sắp đặt, bức thư của Russell đã đến ngay khi tập 2 cuốn *Các luật cơ bản của số học* của Frege sắp sửa được in. Frege choáng váng vội vàng bổ sung thêm vào bản thảo một sự thừa nhận chân thành: "Một nhà khoa học khó có thể gặp điều gì khó chịu hơn là có những cơ sở để phải chịu là sai ngay khi công trình của mình vừa mới hoàn thành. Tôi bị đặt vào tình thế này bởi lá thư từ ông Bertrand Russell khi cuốn sách này đã sắp ấn hành". Với bản thân Russell, ông đã viết những lời hòa nhã: "Sự phát hiện ra mâu thuẫn của ông đã khiến tôi vô cùng kinh ngạc và, tôi phải nói là, sửng sốt, bởi nó làm lung lay nền tảng mà tôi định dựa vào đó để xây dựng số học".

Thực tế mà một nghịch lý có thể có hiệu ứng tàn phá như vậy đến toàn bộ một chương trình nhằm tạo nên nền tảng của

toán học, thoạt nghe có thể khá ngạc nhiên, nhưng như nhà lôgic thuộc Đại học Harvard W. V. O. Quine đã từng nói: "Hơn một lần trong lịch sử việc phát hiện ra nghịch lý đã là cơ hội để tái thiết phần lớn nền tảng của tư duy". Nghịch lý Russell đã mang đến chính xác một cơ hội như vậy.

Nghịch lý Russell

Người mà về cơ bản một tay dựng nên lý thuyết về tập hợp là nhà toán học người Đức Georg Cantor. Tập hợp, hay lớp, nhanh chóng tỏ ra là cơ bản và gắn bó chặt chẽ với lôgic đến mức bất kỳ một nỗ lực nào nhằm xây dựng toán học dựa trên nền tảng lôgic cũng tất yếu hàm ý rằng người ta xây dựng nó trên nền tảng tiên đề của lý thuyết tập hợp.

Một lớp hay một tập hợp đơn giản là một bộ các đối tượng. Các đối tượng ở đây không cần phải có liên quan với nhau theo bất cứ cách nào. Bạn có thể nói về một lớp có chứa tất cả các khoản mục sau: phim truyền hình phát sóng năm 2003, ngựa trắng của Napoleon, và khái niệm về tình yêu đích thực. Các đối tượng thuộc một lớp nhất định được gọi là *các phần tử* của nó.

Hầu hết các lớp đối tượng mà bạn thường gặp đều không phải là phần tử của chính chúng. Chẳng hạn, lớp của mọi bông tuyết bản thân nó không phải là tuyết; lớp của mọi đồng hồ cổ không phải là một đồng hồ cổ, và v.v. Nhưng một số lớp lại thực sự là phần tử của chính chúng. Ví dụ, lớp "mọi thứ không phải là đồng hồ cổ" là một phần tử của chính nó, vì lớp này hoàn toàn không phải là cái đồng hồ cổ. Tương tự như vậy, lớp của mọi lớp cũng là phần tử của chính nó vì rõ ràng nó là

mót lớp. Nhưng thế con lớp của "tất cả các lớp mà không phải là phần tử của chính chúng" thì sao? Hãy gọi đó là lớp *R*. Liệu *R* có phải là phần tử của chính nó (tức là của *R*) hay không? Rõ ràng là *R* không thể thuộc *R*, vì nếu đúng như thế thì nó sẽ trái với định nghĩa về phần tử của *R*. Nhưng nếu *R* không thuộc về chính nó thì theo định nghĩa, nó phải là phần tử của *R*. Tương tự như tình huống của người thợ cạo, vì vậy chúng ta thấy rằng lớp *R* vừa thuộc vừa không thuộc *R*, nghĩa là một mâu thuẫn lôgic. Đây chính là nghịch lý mà Russell đã gửi cho Frege. Vì nghịch lý này đã hủy hoại toàn bộ quá trình mà nhờ nó các lớp hay tập hợp được xác định, nên cú đánh này đối với chương trình của Frege là thực sự chí tử. Mặc dù Frege đã có một số nỗ lực trong tuyệt vọng để cứu chữa hệ thống tiên đề của mình, song ông đã không thành công. Kết luận có vẻ như thật thảm khốc - thay vì vững chắc hơn toán học, lôgic hình thức dường như dễ bị tổn thương hơn do sự không nhất quán làm cho tê liệt.

Gần như đồng thời với việc Frege đang phát triển chương trình lôgic học của mình, nhà toán học và lôgic người Italia là Giuseppe Peano cũng đã thử một cách tiếp cận khác. Peano muốn đặt số học trên cơ sở tiên đề. Do đó, điểm xuất phát của ông là phát biểu một tập hợp các tiên đề cô đọng và đơn giản. Chẳng hạn, ba tiên đề đầu tiên của ông như sau:

1. Zero là một số
2. Kế tiếp một số bất kỳ cũng là một số.
3. Không có hai số có cùng một số kế tiếp.

Vấn đề là trong khi hệ tiên đề của Peano thực sự tái tạo được các luật đã biết của số học (khi đã đưa vào một số định nghĩa

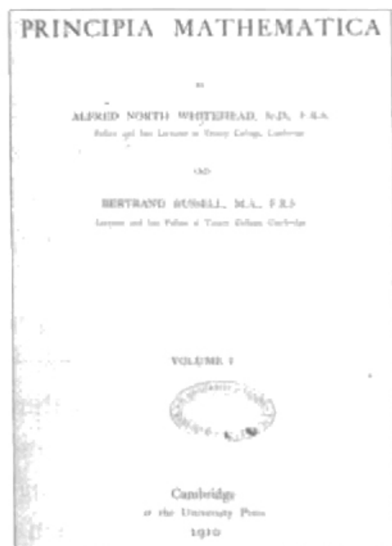


Hình 50

bổ sung), thì lại không có gì xác định được các số tự nhiên một cách duy nhất.

Bước tiếp theo đã được thực hiện bởi Bertrand Russell. Ông vẫn cho rằng ý tưởng ban đầu của Frege - ý tưởng rút ra số học từ lôgic - vẫn là con đường đúng đắn. Đáp ứng nhiệm vụ cao cả này, Russell đã tạo ra, cùng với Alfred North Whitehead (H. 50), một kiệt tác lôgic phi thường - một cuốn sách có tính cột mốc gồm ba tập nhan đề *Principia Mathematica*. Ngoại trừ cuốn *Organon* của Aristotle ra, thì đây có lẽ là tác phẩm có tầm ảnh hưởng lớn nhất trong lịch sử lôgic học (H.51 là trang bìa của lần xuất bản đầu tiên).

Trong *Principia*, Russell và Whitehead đã bảo vệ quan điểm cho rằng toán học, về cơ bản, là sự tạo dựng các luật lôgic, và giữa chúng không có một ranh giới rạch ròi. Tuy nhiên, để đạt được sự mô tả nhất quán, thì bằng cách nào đó chúng phải kiểm soát được các nghịch lý (ngoài nghịch lý của Russell ra, nhiều nghịch lý khác cũng đã được khám phá). Điều này đòi hỏi


PRINCIPIA MATHEMATICA

ALFRED NORTH WHITEHEAD

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.

VOLUME I

Cambridge

1910

Hình 51

phải có những thủ pháp lôgic khéo léo và thiện nghệ. Russell biện luận rằng các nghịch lý đó sở dĩ nảy sinh chỉ bởi vì cái "vòng luẩn quẩn" trong đó người ta định nghĩa các thực thể thông qua một lớp các đối tượng mà trong chính nó đã chứa một thực thể xác định. Theo lời của Russell thì: "Nếu tôi nói 'Napoleon có đủ mọi phẩm chất làm nên một vị tướng vĩ đại', thì tôi phải định nghĩa 'các phẩm chất' theo cách sao cho nó phải không bao hàm điều mà tôi đang nói, tức là 'việc có đủ mọi phẩm chất làm nên một vị tướng vĩ đại' bản thân nó phải không được là một phẩm chất theo nghĩa đã giả thiết".

Để tránh nghịch lý, Russell đã đề xuất một *lý thuyết các kiểu hình*, trong đó một lớp (hay tập hợp) thuộc về một kiểu hình lôgic cao hơn cái kiểu hình của các phần tử của nó. Chẳng hạn, từng cầu thủ trong đội bóng Dallas Cowboy sẽ là kiểu hình 0.

Bản thân đội bóng Dallas Cowboy, là một lớp các cầu thủ, sẽ là kiểu hình 1. Giải bóng đá quốc gia, là một lớp các đội bóng, sẽ là kiểu hình 2; tập hợp các giải đấu (nếu có) sẽ là kiểu hình 3, và cứ tiếp tục như vậy. Trong sơ đồ này, khái niệm "một lớp là phần tử của chính nó" là không sai cũng không đúng, mà đơn giản chỉ là vô nghĩa. Kết quả là, nghịch lý kiểu như nghịch lý Russell sẽ không bao giờ xuất hiện.

Tất nhiên *Principia* là một sự thành công to lớn trong lôgic học, song khó có thể xem nó như là một nền tảng mà người ta đã tìm kiếm bấy lâu nay cho toán học. Lý thuyết các kiểu hình của Russell được nhiều người xem như là một phương thuốc nhân tạo cho vấn đề các nghịch lý - phương thuốc mà ngoài ra còn tạo nên những phân nhánh một cách phức tạp rắc rối. Chẳng hạn, số hữu tỷ (cũng tức là các phân số tối giản) hóa ra lại là kiểu hình cao hơn các số tự nhiên. Để tránh một số các biến chứng đó, Russell và Whitehead đã đưa ra một tiên đề bổ sung, được gọi là tiên đề khả quy, nhưng mà bản thân nó cũng lại tạo ra những tranh cãi và sự hồ nghi nghiêm trọng.

Những cách thức tao nhã hơn để loại bỏ các nghịch lý cuối cùng đã được đề xuất bởi nhà toán học Ernst Zermelo và Abraham Fraenkel. Trong thực tế, họ đã cố gắng tiên đề hóa một cách nhất quán lý thuyết tập hợp và tái tạo hầu như toàn bộ các kết quả của lý thuyết tập hợp. Điều này nhìn bề ngoài dường như ít nhất đã thỏa mãn được phần nào giấc mơ của những người Platonic. Nếu lý thuyết tập hợp và lôgic học là hai mặt đúng của cùng một đồng xu thì một nền tảng vững chắc của lý thuyết tập hợp sẽ kéo theo một nền tảng vững chắc của lôgic học. Thêm vào đó, nếu phần lớn toán học thực tế được suy ra từ lôgic, thì điều này mang lại cho toán học một sự chắc

chắn khách quan nhất định, và nó có lẽ cần được khai thác để giải thích tính hiệu quả của toán học. Không may là, các nhà Platonic đã không thể ăn mừng được lâu, vì họ sắp sửa vấp phải một trường hợp tồi tệ đã được đoán trước.

Cuộc khủng hoảng phi Euclid một lần nữa?

Năm 1908, nhà toán học người Đức Ernst Zermelo (1871-1953) đã đi theo một con đường rất tương tự với con đường mà Euclid đã lần đầu tiên vạch ra vào khoảng năm 300 trước CN. Euclid đã đưa ra một số tiên đề không chứng minh nhưng được cho là hiển nhiên về các điểm và đường thẳng rồi sau đó dựng nên môn hình học dựa trên các tiên đề đó. Zermelo - người đã khám phá ra nghịch lý Russell một cách độc lập vào khoảng đầu năm 1900 - đã đề xuất một cách thức xây dựng lý thuyết tập hợp dựa trên một nền tảng tiên đề tương ứng. Nghịch lý Russell được bỏ qua trong lý thuyết này bằng cách lựa chọn một cách thận trọng các nguyên lý xây dựng nhằm loại bỏ những ý tưởng mâu thuẫn kiểu như "tập hợp của mọi tập hợp". Sơ đồ của Zermelo còn được phát triển xa hơn vào năm 1922 bởi nhà toán học Israel Abraham Fraenkel (1891-1965) để tạo nên cái mà sau này trở thành lý thuyết tập hợp Zermelo-Fraenkel (những thay đổi quan trọng khác sau này được John von Neumann bổ sung vào năm 1925). Mọi thứ gần như đã hoàn hảo (nhưng sự nhất quán phi mâu thuẫn vẫn còn cần được chứng minh) không còn phải chịu những nghi ngờ lằng nhằng nào nữa. Có một tiên đề - gọi là *tiên đề lựa chọn* - cũng giống như tiên đề 5

nổi tiếng của Euclid khiến các nhà toán học điên đầu. *Nói* đơn giản thì tiên đề lựa chọn phát biểu rằng: Nếu *X* là một tập hợp của những tập hợp không rỗng, thì chúng ta có thể lựa chọn được một phần tử đơn lẻ từ mỗi tập hợp trong số tất cả mọi tập hợp trong *X* để tạo nên một tập hợp mới *Y*. Bạn có thể dễ dàng kiểm tra phát biểu này là đúng nếu tập hợp *X* là không vô hạn. Ví dụ, nếu chúng ta có 100 cái hộp, mỗi hộp chứa ít nhất một viên bi, chúng ta có thể dễ dàng chọn một viên bi từ mỗi hộp để tạo nên một tập hợp mới *Y* có chứa 100 viên bi. Trong trường hợp như vậy, chúng ta không cần một tiên đề đặc biệt; chúng ta thực sự có thể chứng minh được rằng một sự lựa chọn là khả dĩ. Phát biểu này còn đúng ngay cả với các tập hợp *X* vô hạn, chừng nào chúng ta có thể chỉ ra một cách chính xác sự lựa chọn được tiến hành như thế nào. Chẳng hạn, hãy hình dung một tập hợp vô hạn các tập không rỗng của các số tự nhiên. Các phần tử của tập hợp này có thể là các tập như {2, 6, 7}, {1,0}, {346, 5, 11, 1257}, {tất cả các số tự nhiên giữa 381 và 10.457}, và cứ tiếp tục như vậy. Trong mọi tập hợp của các số tự nhiên, luôn có một phần tử là nhỏ nhất. Vì vậy, sự lựa chọn của chúng ta có thể được mô tả một cách duy nhất theo cách sau: "Từ mỗi tập hợp, ta chọn ra phần tử nhỏ nhất". Trong trường hợp này, một lần nữa ta lại có thể tránh được nhu cầu cần có một tiên đề lựa chọn. Vấn đề nổi lên là đối với các tập hợp vô hạn trong đó chúng ta không thể xác định được cách lựa chọn. Trong hoàn cảnh như vậy, quá trình lựa chọn không bao giờ là kết thúc và sự tồn tại của một tập hợp bao gồm một cách chính xác một phần tử lấy từ mỗi phần tử của tập *X* trở thành một vấn đề của lòng tin.

Ngay từ khởi đầu, tiên đề lựa chọn đã tạo nên sự tranh cãi gay gắt giữa các nhà toán học. Thực tế mà tiên đề khẳng định

về sự tồn tại của những đối tượng toán học nhất định (ví dụ các lựa chọn), mà không thực sự cung cấp một ví dụ cụ thể nào về nó, đã làm bùng lên ngọn lửa, đặc biệt là từ những người ủng hộ cho trường phái tư duy được gọi là *cấu trúc luận* (có liên quan mật thiết về mặt triết học với *trực giác luận*). Những người theo cấu trúc luận cho rằng bất kỳ điều gì tồn tại cũng đều có thể được xây dựng một cách tường minh. Các nhà toán học khác cũng có xu hướng tránh tiên đề lựa chọn và chỉ sử dụng các tiên đề khác trong lý thuyết tập hợp của Zermelo-Fraenkel.

Vì những mặt hạn chế có thể cảm nhận được của tiên đề lựa chọn, các nhà toán học bắt đầu tự hỏi liệu có thể chứng minh được tiên đề này nhờ sử dụng các tiên đề khác hay không. Lịch sử của tiên đề 5 Euclid dường là đã được lặp lại. Câu trả lời một phần, cuối cùng, cũng đã được đưa ra vào cuối những năm 1930. Kurt Gödel (1906-78), một trong những nhà lôgic có ảnh hưởng nhất của mọi thời đại, đã chứng minh được rằng tiên đề lựa chọn và phỏng đoán nổi tiếng khác của nhà sáng lập lý thuyết tập hợp, Georg Cantor, được gọi là *giả thuyết continuum*, đều nhất quán với các tiên đề Zermelo-Fraenkel khác. Tức là, cả hai giả thuyết đó đều không bị các tiên đề khác của lý thuyết tập hợp bác bỏ. Các chứng minh bổ sung vào năm 1963 bởi nhà toán học Mỹ Paul Cohen (1934-2007, thật đáng buồn là ông đã qua đời vào thời gian tôi đang viết cuốn sách này) đã thiết lập một sự độc lập hoàn toàn của tiên đề lựa chọn và giả thuyết continuum. Nói cách khác, tiên đề lựa chọn không thể chứng minh cũng không thể bác bỏ bởi các tiên đề khác của lý thuyết tập hợp. Tương tự như vậy, giả thuyết continuum cũng không được chứng minh hay bác bỏ bởi cùng các tiên đề đó, thậm chí kể cả khi gộp cả tiên đề lựa chọn vào.

Sự phát triển này đã có những hệ quả triết học sâu sắc. Cũng như trường hợp hình học phi Euclid ở thế kỷ 19, không chỉ có một lý thuyết tập hợp hoàn chỉnh cuối cùng, mà ít nhất có tới bốn! Người ta có thể đưa ra những giả thiết khác nhau về các tập hợp vô hạn và kết cục thu được các lý thuyết tập hợp loại trừ nhau. Chẳng hạn, người ta có thể giả thiết rằng cả tiên đề lựa chọn và giả thuyết continuum đều đúng và sẽ nhận được một phiên bản, hoặc giả thiết cả hai đều không đúng và sẽ nhận được một lý thuyết hoàn toàn khác. Tương tự, khi giả thiết một trong hai tiên đề là đúng và phủ định cái còn lại sẽ dẫn đến hai lý thuyết tập hợp khác nữa.

Đây chính là sự lặp lại cuộc khủng hoảng phi Euclid, chỉ có điều tồi tệ hơn. Vai trò cơ bản của lý thuyết tập hợp như là một cơ sở tiềm tàng của toàn bộ toán học đã làm cho vấn đề này đối với các nhà Platonic trở nên gay gắt hơn nhiều. Nếu như người ta thực sự có thể phát biểu nhiều lý thuyết tập hợp chỉ đơn giản bằng việc lựa chọn một tập hợp tiên đề khác, thì phải chăng sự biện hộ này cho toán học chẳng là gì khác hơn sự phát minh của con người? Chiến thắng của những người theo chủ nghĩa hình thức có vẻ như đã được đảm bảo chắc chắn.

Một chân lý bất toàn

Trong khi Frege quan tâm rất nhiều đến ý nghĩa của các tiên đề thì người đề xướng chính của chủ nghĩa hình thức, nhà toán học vĩ đại người Đức David Hilbert (H. 52), lại ủng hộ cho việc né tránh hoàn toàn bất kỳ giải thích nào về các công thức toán học. Hilbert không quan tâm đến những vấn đề đại loại như



Hình 52

toán học có được rút ra từ các khái niệm lôgic hay không. Thay vì thế, với ông, toán học đơn giản chỉ là một tập hợp những công thức vô nghĩa - những hình mẫu có cấu trúc tạo bởi các ký hiệu tùy ý. Còn công việc bảo đảm cho những nền tảng của toán học được Hilbert gán cho một nguyên lý mới, mà người ta thường xem như là "siêu toán học". Tức là, siêu toán học liên quan đến việc sử dụng chính các phương pháp của giải tích toán học để chứng minh rằng toàn bộ quá trình rút ra các định lý từ hệ tiên đề, do hệ hình thức đòi hỏi, bằng cách tuân theo những quy tắc suy luận chặt chẽ, là phi mâu thuẫn. Nói một cách khác, Hilbert cho rằng ông có thể chứng minh một cách toán học rằng toán học vận hành tốt. Ông viết:

> Những nghiên cứu của tôi về đặt nền tảng mới của toán học có mục tiêu không gì khác hơn là điều này: để loại

> bỏ, một lần cho mãi mãi, những nghi vấn chung về độ tin cậy của suy luận toán học... Mọi thứ mà trước đây tạo nên toán học cần được hình thức hóa một cách chặt chẽ, sao cho toán học đích thực hay toán học đúng nghĩa trở thành một kho các công thức... Ngoài toán học đích thực được hình thức hóa này, chúng ta còn có một toán học ở phạm vi mới: một siêu toán học cần thiết để bảo vệ cho toán học, và trong đó, trái ngược với kiểu suy luận hình thức thuần túy trong toán học đích thực - người ta áp dụng suy luận theo ngữ cảnh, nhưng chỉ để chứng minh sự nhất quán của các tiên đề... Vì vậy, sự phát triển của khoa học toán học như một tổng thể đã diễn ra theo hai cách thường xuyên thay thế nhau: một mặt chúng ta rút ra những công thức có thể chứng minh từ các tiên đề bằng suy luận hình thức; mặt khác, chúng ta đưa thêm vào những tiên đề mới và chứng minh sự nhất quán của chúng bằng suy luận ngữ cảnh.

Chương trình của Hilbert đã hy sinh ý nghĩa để bảo đảm an toàn cho các nền tảng. Do đó, đối với những người đi theo chủ nghĩa hình thức của ông, toán học thực sự chỉ là một trò chơi, nhưng mục đích của họ là để chứng minh một cách chặt chẽ nó là một trò chơi nhất quán hoàn toàn. Với tất cả sự phát triển trong quá trình tiên đề hóa, sự nhận thức về giấc mơ "lý thuyết-chứng minh" theo hình thức luận này dường như mới chỉ lấp ló đâu đó.

Tuy nhiên, không phải ai cũng bị thuyết phục rằng con đường mà Hilbert lựa chọn là đúng đắn. Ludwig Wittgenstein (1889-

1951), được một số người xem như là nhà triết học vĩ đại nhất thế kỷ 20, coi nỗ lực của Hilbert về siêu toán học chỉ như một sự lãng phí thời gian. "Chúng ta không thể bỏ quy tắc này vì ứng dụng một quy tắc khác", ông biện luận. Nói cách khác, Wittingenstein không tin rằng sự hiểu biết về một "trò chơi" lại có thể dựa trên sự xây dựng của một trò chơi khác: "Nếu như tôi không rõ bản chất của toán học, thì không có chứng minh nào có thể giúp được tôi". Dù vậy, không ai mong là sắp có sét đánh. Chỉ bằng một đòn, chàng trai Kurt Gödel 24 tuổi đã đóng một cái cọc ngay chính giữa trái tim của chủ nghĩa hình thức.

Kurt Gödel (H. 53) sinh ngày 28 tháng 4 năm 1906, tại thành phố Moravian mà sau này được biết tới với cái tên tiếng Séc là Brno. Vào thời đó, thành phố vẫn còn thuộc đế chế Áo-Hung, và Gödel lớn lên trong một gia đình nói tiếng Đức. Cha ông, Rudolf Gödel, quản lý một nhà máy dệt và mẹ ông, bà Mariane Gödel, chăm lo để cậu Kurt có được một sự giáo dục rộng về



Hình 53

toán, lịch sử, ngôn ngữ và tôn giáo. Trong suốt những năm tuổi *teen*, Gödel đã bộc lộ sự quan tâm đặc biệt đối với toán học và triết học và ở tuổi 18, ông vào học tại Đại học Vienna, và ở đây sự chú ý của ông lại chuyển hướng hẳn sang lôgic toán. Ông đặc biệt hứng thú với cuốn *Principia Mathematica* của Russell và Whitehead cũng như chương trình của Hilbert, và đã lựa chọn đề tài luận án của mình là vấn đề về *tính đầy đủ*. Mục tiêu của nghiên cứu này, về cơ bản, là nhằm xác định liệu cách tiếp cận hình thức do Hilbert chủ trương đã đủ để tạo ra mọi phát biểu đúng đắn của toán học hay không. Gödel đã nhận học vị tiến sỹ vào năm 1930 và một năm sau, ông đã cho công bố *các định lý về tính không đầy đủ* (hay còn gọi ngắn gọn là *các định lý về tính bất toàn*) của mình, và đã tạo ra một đợt sóng gây choáng váng truyền đi khắp thế giới toán học và triết học.

Theo ngôn ngữ của toán học thuần túy, thì hai định lý này nghe có vẻ khá kỹ thuật và không có gì gây gây sốc lắm:

1. Mọi hệ hình thức phi mâu thuẫn *S* mà trong đó số học sơ cấp có thể được thực hiện, đều là không đầy đủ đối với mọi mệnh đề của số học sơ cấp, cụ thể là có những mệnh đề mà ta không thể chứng minh hay bác bỏ được trong *S*.

2. Đối với mọi hệ hình thức phi mâu thuẫn *S* mà trong đó số học sơ cấp có thể được thực hiện, thì tính phi mẫu thuẫn của *S* không thể được chứng minh trong chính *S*.

Từ ngữ ở đây dường như khá ôn hòa, song những hệ quả đối với chương trình của những người theo chủ nghĩa hình thức thì có những ảnh hưởng rất sâu rộng. Nói một cách phần nào hơi đơn giản hóa thì các định lý bất toàn đã chứng minh được

rằng chương trình hình thức chủ nghĩa của Hilbert, về căn bản, đã thất bại ngay từ lúc bắt đầu. Gödel đã chứng tỏ rằng bất kỳ một hệ hình thức đủ mạnh nào để đáng được quan tâm thì nó hoặc là bất toàn hoặc là không nhất quán một cách cố hữu. Tức là, trong trường hợp may lắm, sẽ luôn luôn có sự khẳng định rằng hệ hình thức hoặc là không chứng minh được hoặc là không bác bỏ được. Còn trong trường hợp xấu nhất thì hệ sẽ dẫn đến mâu thuẫn. Vì đối với phát biểu *T* bất kỳ: hoặc *T* hoặc không phải-*T* phải là đúng, nên thực tế là một hệ hình thức hữu hạn có thể hoặc không chứng minh được hoặc không bác bỏ được một số khẳng định, có nghĩa là luôn tồn tại những phát biểu đúng mà ta không thể chứng minh được trong hệ đó. Nói cách khác, Gödel đã chứng minh được rằng không có hệ hình thức nào được tạo bởi một tập hữu hạn các tiên đề và quy tắc suy luận *bao giờ cũng* có thể thâu tóm được toàn bộ các chân lý của toán học. Điều nhiều nhất mà người ta có thể hy vọng đó là sự tiên đề hóa được thừa nhận một cách rộng rãi chỉ là bất toàn, chứ không phải là mâu thuẫn.

Bản thân Gödel tin rằng một khái niệm Platonic, độc lập của chân lý toán học là thực sự tồn tại. Trong một bài báo công bố năm 1947, ông viết:

> Song, mặc cho sự xa cách giữa chúng [các chân lý toán học] với kinh nghiệm có được từ cảm giác, chúng ta vẫn có điều gì đó giống như một sự cảm nhận về các đối tượng của lý thuyết tập hợp, khi được nhìn từ thực tế rằng các tiên đề buộc chúng ta phải coi chúng là đúng đắn. Tôi không thấy có bất kỳ lý do nào khiến chúng ta phải kém tin cậy vào loại cảm nhận này, tức là vào trực giác toán học, hơn là nhận thức bằng cảm giác.

Do sự xoay chuyển trớ trêu của số phận, ngay khi các nhà chủ nghĩa hình thức đã sẵn sàng cho cuộc diễu hành chiến thắng của mình, thì Kurt Gödel - một người tự nhận là theo trường phái Platonic - đã xuất hiện và trút mưa xuống đoàn diễu hành của chương trình hình thức chủ nghĩa.

Nhà toán học nổi tiếng John von Neumann (1903-57), người lúc đó đang giảng về các công trình của Hilbert, đã hủy toàn bộ phần còn lại của khóa học đã được lên chương trình của mình và dành toàn bộ thời gian đó cho những phát hiện của Gödel.

Gödel là một người mà trên mọi phương diện đều phức tạp như chính các định lý của ông. Năm 1940, ông và vợ là Adele đã chạy trốn khỏi nước Áo phát xít và đến làm việc tại Viện Nghiên cứu Cao cấp ở Princeton, New Jersey. Ở đó, ông đã trở thành một người bạn tốt và là người thường xuyên đi dạo với Albert Einstein. Khi Gödel xin nhập quốc tịch để trở thành công dân Mỹ vào năm 1948, chính Einstein là người đã cùng với nhà toán học và kinh tế học Oskar Morgenstern (1902-77) của Đại học Princeton, đã dẫn Gödel đến phỏng vấn tại Cơ quan nhập cư và quốc tịch. Các sự kiện xung quanh cuộc phỏng vấn này đã được nhiều người biết, song chúng cũng tiết lộ nhiều về cá tính của Gödel nên tôi sẽ kể lại đầy đủ ở đây, *một cách chính xác* những gì người ta đã ghi lại được theo hồi ức của Oskar Morgenstern vào ngày 13 tháng 9 năm 1971. Tôi rất cảm ơn bà Dorothy Morgenstern Thomas, quả phụ của Morgenstern, và Viện Nghiên cứu Cao cấp đã cung cấp cho tôi một bản sao của tài liệu này:

> Đó là vào năm 1946 khi Gödel muốn trở thành công dân của nước Mỹ. Ông nhờ tôi làm người làm chứng

cho ông, còn người làm chứng thứ hai, thì ông đã đề nghị Albert Einstein, người cũng rất vui vẻ nhận lời. Einstein và tôi thỉnh thoảng có gặp nhau và cùng nhau dự đoán xem điều gì sẽ xảy ra trong thời gian này trước khi tiến hành quá trình nhập quốc tịch và cả trong quá trình đó nữa.

Tôi gặp Gödel vài lần trong suốt vài tháng trước khi sự kiện này bắt đầu để chuẩn bị một cách cẩn thận. Vì là người rất chu đáo nên ông ấy bắt đầu tự tìm hiểu về lịch sử của việc xâm chiếm Bắc Mỹ của con người. Điều này dần dẫn tới việc nghiên cứu lịch sử của người da đỏ Mỹ, các bộ lạc của họ, v.v... Ông ấy gọi điện thoại cho tôi nhiều lần để hỏi mượn tài liệu mà ông nghiên cứu rất kỹ lưỡng. Dần dà có nhiều câu hỏi nảy sinh và tất nhiên rất nhiều nghi ngờ đại loại như các câu chuyện lịch sử này có thực sự đúng hay không và những hoàn cảnh đặc biệt nào đã được tiết lộ trong đó. Từ đó, trong nhiều tuần tiếp sau, Gödel dần dần đi đến chỗ nghiên cứu lịch sử nước Mỹ, đặc biệt tập trung vào các vấn đề liên quan đến luật hiến pháp. Và điều đó cũng dẫn ông tới nghiên cứu về Princeton, và đặc biệt là ông muốn biết từ tôi rằng đâu là ranh giới giữa thị xã và ngoại ô. Tôi đã cố gắng giải thích rằng tất cả những điều đó là không cần thiết, tất nhiên rồi, nhưng không có kết quả. Ông vẫn khăng khăng tìm kiếm tất cả những thực tế mà ông muốn biết và vì vậy tôi đã cung cấp mọi thông tin thích hợp cho ông ấy, kể cả về Princeton. Sau đó ông ấy muốn biết Hội đồng thành phố và cả Hội đồng thị trấn nữa, đã được bầu ra như

thế nào và ai là Thị trưởng, và Hội đồng thị trấn hoạt động ra sao. Ông nghĩ là ông có thể sẽ bị hỏi về những vấn đề như vậy. Nếu ông bộc lộ là mình không biết gì về thị trấn mà ông đang sống thì sẽ có ấn tượng xấu. Tôi đã cố gắng thuyết phục ông ấy rằng những câu hỏi kiểu như vậy chả bao giờ người ta hỏi đâu, rằng đa số các câu hỏi thực sự chỉ là hình thức thôi và ông sẽ trả lời chẳng khó khăn gì; rằng quá lắm là họ có thể hỏi chính phủ hiện nay mà đất nước chúng ta đang có thuộc loại nào hay tòa án cao nhất gọi là gì, và đại loại như vậy. Bất luận thế nào, ông ấy vẫn cứ nghiên cứu Hiến pháp. Giờ mới đến phần thú vị. Ông ấy bảo tôi một cách khá xúc động rằng khi xem xét Hiến pháp, với sự lo lắng của mình, ông đã phát hiện một số mâu thuẫn trong đó và rằng ông có thể chỉ ra cách để một người bất kỳ trở thành một nhà độc tài và thiết lập một chế độ phát xít, một cách hoàn toàn hợp pháp, điều mà những người lập ra Hiến pháp không dự tính tới. Tôi bảo ông ấy rằng rất khó có thể xảy ra những chuyện kiểu như vậy, thậm chí cứ giả sử là ông ấy đúng đi nữa thì tất nhiên là tôi vẫn nghi ngờ. Nhưng ông ấy vẫn cố chấp và vì vậy chúng tôi đã có nhiều cuộc trò chuyện về vấn đề này. Tôi đã cố thuyết phục ông ấy rằng nên tránh đừng nhắc đến những vấn đề kiểu như vậy ở buổi kiểm tra trước tòa ở Trenton, và tôi cũng nói với Einstein về điều đó: ông ấy đã hoảng sợ vì ý tưởng kiểu như vậy lại có thể nảy ra trong đầu Gödel và ông ấy cũng khuyên Gödel không nên lo lắng và cũng đừng thảo luận về vấn đề đó nữa.

Nhiều tháng trôi qua và cuối cùng ngày hẹn ở Trenton đã tới. Vào ngày đặc biệt đó, tôi đã đưa xe đến đón Gödel. Ông ấy ngồi ở ghế sau và sau đó chúng tôi ghé qua đón Einstein tại nhà ông ấy ở phố Mercer, và từ đó chúng tôi lái xe thẳng tới Trenton. Trên đường đi, Einstein nhìn quanh một chút rồi nói: “Này, Gödel, giờ thì anh *thực sự* đã chuẩn bị tốt cho buổi kiểm tra này chứ hả?” Tất nhiên, câu hỏi này làm Gödel bồn chồn khủng khiếp, và đó chính xác là điều mà Einstein dự tính và ông ấy vô cùng vui thích khi thấy vẻ lo lắng trên khuôn mặt của Gödel. Khi tới Trenton, chúng tôi được dẫn vào một căn phòng lớn và trong khi thông thường thì những người làm chứng bị phỏng vấn riêng, nhưng vì sự có mặt của Einstein nên có một ngoại lệ và tất cả ba chúng tôi được mời vào ngồi cùng nhau, Gödel ngồi ở giữa. Người kiểm tra [*sic*] đầu tiên hỏi Einstein và sau đó hỏi tôi là chúng tôi có nghĩ Gödel sẽ là một công dân tốt không. Chúng tôi đảm bảo với anh ta rằng điều đó là chắc chắn, rằng ông ấy là một người đàn ông ưu tú, và v.v... Rồi sau đó thì anh ta quay sang Gödel và nói, “Nào, giờ thì Mr. Gödel, ông là người nước nào?”.

Gödel: Tôi là người nước nào à? Áo.

Người kiểm tra: Chính phủ ở nước Áo các ông thuộc loại nào?

Gödel: Đã từng là nước cộng hòa, nhưng hiến pháp thì sao đó mà cuối cùng nó lại thay đổi thành một kiểu độc tài.

Người kiểm tra: Ồ! Thế thì tệ thật. Điều đó không thể xảy ra ở đất nước này đâu.

Gödel: Ồ, có đấy, tôi có thể *chứng minh* điều đó.

Vậy là trong số tất cả những câu hỏi có thể, thì chính câu hỏi chí mạng lại được người kiểm tra nhắc đến. Einstein và tôi hoảng sợ trong suốt quá trình trao đổi đó; người kiểm tra đủ thông minh để nhanh chóng vỗ về Gödel và nói, "Ồ lạy Chúa, chúng ta không đi vào vấn đề này nhé", và dừng cuộc kiểm tra tại đó, và điều này thực sự giải thoát cho chúng tôi. Cuối cùng, chúng tôi đi ra và khi đang bước tới cửa thang máy, một người đàn ông chạy đuổi theo chúng tôi với một mẩu giấy và cây bút trong tay, anh ta tiến tới chỗ Einstein và xin ông ấy chữ ký. Einstein cảm ơn. Khi chúng tôi đi xuống trong thang máy, tôi quay lại nhìn Einstein và nói, "Thật bực mình khi bị nhiều người quấy rầy kiểu như vậy." Einstein trả lời, "Anh biết đấy, điều này chẳng qua chỉ là tàn dư của tục ăn thịt người thôi mà." Tôi không hiểu và hỏi lại: "Sao lại thế? ". Ông ấy bảo: "Đúng thế, trước đây họ muốn máu của anh, còn giờ thì họ muốn mực của anh".

Sau đó chúng tôi ra về, lái xe trở lại Princeton, và khi tới góc phố Mercer, tôi chợt hỏi Einstein là ông có muốn đi đến Viện không hay là muốn về nhà. Ông ấy bảo: "Đưa tôi về nhà đi. Dù sao thì công việc của tôi cũng không còn đáng gì nữa rồi". Sau đó, ông ấy trích từ một bài hát về chính trị của Mỹ (không may là tôi không còn nhớ được lời, rất có thể tôi đã ghi nó trong

> sổ tay và tôi chắc chắn sẽ nhận ra nó nếu có ai hát lại câu hát cụ thể đó). Sau khi tới nhà Einstein, ông ấy lại quay về phía Gödel và nói: "Này, Gödel, đây là lần kiểm tra của anh, nhưng vẫn còn lần kiểm tra cuối cùng." Gödel: "Chúa ơi, vẫn còn lần kiểm tra nữa sao?" và ông ấy trông đã rất lo lắng rồi. Dừng một lát, Einstein nói tiếp, " Gödel, lần kiểm tra tiếp theo là khi nào thì anh bước chân vào ngôi mộ của mình.". Gödel: "Nhưng này Einstein, tôi sẽ không bước chân vào mộ của tôi". Einstein bèn đáp lại, " Gödel, chỉ là đùa thôi mà." và rồi ông ấy quay người bước vào nhà. Tôi đưa Gödel về nhà. Mọi người đều thở phào vì chuyện khủng khiếp đã qua; Gödel lại có cái đầu tự do một lần nữa để dành cho những vấn đề triết học và lôgic.

Những năm tháng sau này của cuộc đời, Gödel đã phải chịu đựng một khoảng thời gian dài bị rối loạn tâm thần nghiêm trọng, khiến ông không chịu ăn uống gì. Ông mất vào ngày 14 tháng 1 năm 1978 vì thiếu dinh dưỡng và kiệt sức.

Trái với một số quan niệm sai lầm phổ biến, các định lý bất toàn của Gödel không hàm ý rằng một số chân lý sẽ không bao giờ được biết đến. Từ những định lý đó, chúng ta cũng không thể suy ra rằng khả năng hiểu biết của con người vì lý do gì đấy là có giới hạn. Mà thực ra, các định lý này chỉ cho thấy những điểm yếu và thiếu sót của các hệ hình thức. Vì vậy, nó có thể dẫn đến một điều ngạc nhiên là mặc dù những định lý này có ảnh hưởng sâu rộng đối với triết học của toán học, nhưng tác động của chúng đến toán học như là một bộ máy xây dựng lý thuyết thì lại là rất tối thiểu. Thực tế, trong suốt nhiều thập

kỷ xung quanh thời điểm công bố chứng minh của Gödel, toán học đã đạt tới một số thành công ngoạn mục nhất của nó trong các lý thuyết vật lý về vũ trụ. Không còn bị vứt bỏ như là thứ không đáng tin cậy, toán học và các kết luận lôgic của nó ngày càng trở nên thiết yếu đối với sự tìm hiểu về vũ trụ.

Tuy nhiên, điều này có nghĩa là câu đố về "tính hiệu quả đến phi lý" của toán học thậm chí còn trở nên hóc búa hơn. Hãy nghĩ về điều này một chút. Hãy thử hình dung xem điều gì sẽ xảy ra nếu như nỗ lực của các nhà lôgic hoàn toàn thành công. Điều này sẽ dẫn đến hệ quả là toán học bắt nguồn hoàn toàn từ lôgic - mà đúng ra là từ các luật của tư duy. Nhưng làm thế nào mà một khoa học suy diễn như thế lại có thể phù hợp một cách kỳ diệu với các hiện tượng tự nhiên đến như vậy? Mối quan hệ giữa lôgic hình thức (có thể chúng ta nên nói là lôgic hình thức của con người) và vũ trụ là gì? Câu trả lời cũng không trở nên rõ ràng hơn sau Hilbert và Gödel. Giờ đây tất cả những gì đã tồn tại chỉ là một "trò chơi" hình thức bất toàn, được diễn đạt bằng ngôn ngữ toán học. Vậy thì làm thế nào mà các mô hình dựa trên một hệ "không đáng tin cậy" như vậy lại có thể tạo ra được những hiểu biết sâu sắc về vũ trụ và sự vận hành của nó? Trước khi thử trả lời những câu hỏi này, tôi muốn làm sâu sắc chúng thêm một chút nữa bằng cách xem xét một số các nghiên cứu tình huống (*case study*) nhằm minh họa những điểm tinh tế của tính hiệu quả của toán học.

CHƯƠNG 8

TÍNH HIỆU QUẢ ĐẾN PHI LÝ?

Trong chương 1, tôi đã lưu ý rằng thành công của toán học trong các lý thuyết vật lý có hai khía cạnh: một tôi gọi là "chủ động" và hai là "thụ động". Khía cạnh "chủ động" phản ánh thực tế là các nhà khoa học phát biểu các định luật của tự nhiên bằng các thuật ngữ toán học có thể áp dụng được một cách rõ ràng. Tức là, họ sử dụng các thực thể toán học, các quan hệ và các phương trình đã được phát triển cùng với một ứng dụng trong óc, mà thường là cho chính chủ đề đang xét. Trong những trường hợp đó, các nhà nghiên cứu có xu hướng dựa vào những điều tương tự cảm nhận được giữa các tính chất của những khái niệm toán học và các hiện tượng quan sát được hay các kết quả thí nghiệm. Tính hiệu quả của toán học có thể dường như không đáng ngạc nhiên lắm trong các trường hợp này, vì người ta có thể lý luận rằng các lý thuyết đó đã được "may cắt" sao cho phù hợp với quan sát. Tuy nhiên, vẫn còn có một phần đáng kinh ngạc của việc sử dụng "chủ động" liên quan đến tính chính xác, mà tôi sẽ bàn đến dưới đây, ở chương này. Tính hiệu quả "thụ động" có liên quan với những trường

hợp mà trong đó toàn bộ các lý thuyết toán học trừu tượng được phát triển, mà không dự tính cho một ứng dụng nào, và chỉ sau đó mới biến hình thành các mô hình vật lý có sức tiên đoán mạnh mẽ. *Lý thuyết nút* cung cấp một ví dụ ngoạn mục về tác dụng tương hỗ giữa tính hiệu quả chủ động và thụ động.

Nút

Nút là thứ mà thậm chí còn tạo nên cả những huyền thoại. Bạn có thể nhớ lại câu chuyện thần thoại Hy Lạp về cái nút thắt Gordius. Một lời sấm nói với người dân thành Phrygia rằng vị vua tiếp theo của họ là người đầu tiên tiến vào thủ đô trên một chiếc xe bò kéo. Gordius, một người nông dân hoàn toàn tình cờ, ngồi trên một chiếc xe bò kéo đi vào thị trấn, và thế là bỗng nhiên trở thành vua. Dạt dào lòng biết ơn, Gordius đã dâng chiếc xe của mình cho các vị thần, và ông đã buộc nó vào cọc bằng một nút thắt phức tạp nhằm thách đố mọi cố gắng cởi nút thắt đó ra. Sau này một lời tiên tri tuyên bố rằng ai cởi được cái nút thắt đó sẽ trở thành vua của châu Á. Như định mệnh an bài, người đã cởi được nút thắt đó (vào khoảng năm 333 trước CN) chính là Alexander Đại đế, và ông thực sự đã trở thành người cai trị châu Á. Tuy nhiên, cách cởi nút thắt Gordius của Alexander lại không phải chính xác là cách mà chúng ta gọi là tài tình hay thậm chí là cởi đẹp - thực ra ông ta đã dùng kiếm của mình để cắt cái nút đó!

Nhưng chúng ta không phải đi cả chặng đường dài trở lại Hy Lạp cổ đại chỉ để thấy các nút thắt. Một đứa trẻ buộc dây giày, một cô gái buộc bím tóc, một bà đan áo len hay một thủy thủ

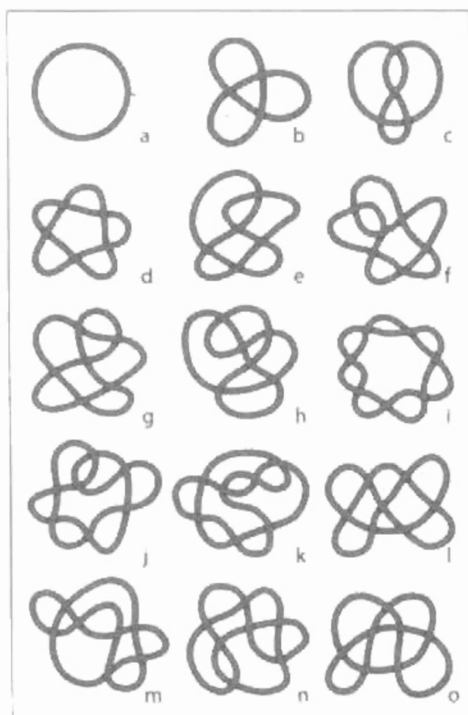
cột con thuyền của mình đều sử dụng một loại nút thắt nào đó. Các loại nút thắt khác nhau thậm chí còn được đặt những cái tên rất giàu tưởng tượng, như "nút thắt của người đánh cá", "nút buộc của người Anh", nút "vuốt mèo", "nút thắt tình yêu chân thành", và "nút thắt của người treo cổ". Đặc biệt là những nút thắt hàng hải, về mặt lịch sử, đã được xem là đủ quan trọng để gợi cảm hứng viết nên cả một pho sách về chúng vào thế kỷ 17 ở Anh. Một trong những cuốn sách này, một cách tình cờ, đã được viết không bởi ai khác mà chính là nhà thám hiểm Anh John Smith (1580-1631), người được biết đến nhiều hơn bởi mối quan hệ lãng mạn của ông với công chúa thổ dân Mỹ Pocahontas.

Lý thuyết toán học về các nút ra đời vào năm 1771 trong một bài báo của nhà toán học Pháp Alexandre - Théophile Vandermonde (1735-96). Ông là người đầu tiên nhận ra rằng các nút có thể được nghiên cứu như là một bộ phận của môn *hình học vị trí*, lĩnh vực khảo sát các mối quan hệ chỉ phụ thuộc vào vị trí, chứ không quan tâm tới kích thước và việc tính toán các đại lượng. Vai trò tiếp theo trong sự phát triển của lý thuyết nút, là "Hoàng tử toán học" người Đức, Carl Friedrich Gauss. Một số ghi chép của Gauss có chứa các hình vẽ và những mô tả chi tiết về các nút, cùng với một số khảo sát phân tích về các tính chất của chúng. Các công trình của Vandermonde, Gauss và một số nhà toán học khác ở thế kỷ 19 đều rất quan trọng, nhưng động lực chủ yếu nằm phía sau lý thuyết nút hiện đại lại đến từ một nguồn không hề mong đợi - đó là nỗ lực giải thích về cấu trúc của vật chất. Ý tưởng này khởi nguồn trong óc của nhà vật lý nổi tiếng người Anh William Thomson, người ngày nay được biết đến nhiều hơn dưới cái tên Huân tước Kelvin

(1824-1907). Nỗ lực của Thomson tập trung vào việc xây dựng một lý thuyết về nguyên tử, mà thời đó được coi là những viên gạch tạo nên vật chất. Theo sự phỏng đoán thuần túy tưởng tượng của ông, thì các nguyên tử thực sự là các ống ête bị thắt nút, với ête là một chất bí ẩn được cho là tràn ngập khắp không gian. Sự phong phú của các chất hóa học, theo mô hình này, được giải thích là do sự đa dạng của các nút thắt này.

Nếu như phỏng đoán của Thomson ngày nay nghe có vẻ như là điên rồ thì chỉ là bởi vì chúng ta có cả một thế kỷ để làm quen và kiểm tra bằng thực nghiệm mô hình đúng của nguyên tử, trong đó các electron quay xung quanh hạt nhân nguyên tử. Nhưng đây là nước Anh vào những năm 1860, và Thomson bị ấn tượng một cách sâu sắc về sự ổn định của những vòng khói thuốc phức tạp và khả năng rung động của chúng - hai tính chất được xem như là cốt yếu đối với việc lập mô hình nguyên tử vào thời đó. Để phát triển các nút thắt tương tự như bảng tuần hoàn các nguyên tố, Thomson đã phải phân loại các nút - tìm xem có thể tồn tại những kiểu nút khác nhau nào - và điều cần thiết cho việc lập bảng các nút thắt đó đã làm bùng lên sự quan tâm nghiêm túc đối với toán học của các nút.

Như tôi đã giải thích ở Chương 1, một nút thắt toán học trông giống như một nút thắt quen thuộc ở một sợi dây bình thường, chỉ có điều hai đầu dây được nối vào nhau. Nói cách khác, một nút toán học được mô tả như một đường cong khép kín không có đầu hở. Một số ví dụ được trình bày ở hình 54, trong đó các nút thắt ba chiều được biểu diễn bằng hình chiếu, hay bóng, của chúng trên mặt phẳng. Vị trí trong không gian của hai đoạn dây bất kỳ bắt chéo nhau được chỉ ra trên hình vẽ bằng sự đứt đoạn của đường biểu diễn đoạn dây nằm dưới.



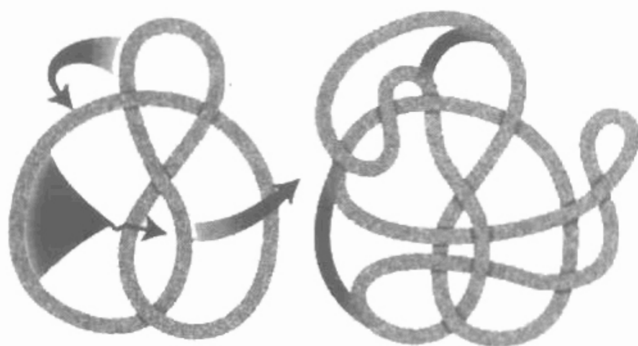
Hình 54

Nút thắt đơn giản nhất - được gọi là *không nút* - chỉ đơn giản là một đường tròn khép kín (như H. 54a). *Nút thắt hình cỏ ba lá* (H. 54b) có ba đoạn bắt chéo nhau, và *nút thắt hình số 8* (H.54c) có bốn đoạn bắt chéo nhau. Trong lý thuyết của Thomson, ba nút này, về nguyên tắc, có thể là mô hình của ba nguyên tử có độ phức tạp tăng dần, là nguyên tử hyđro, cácbon, và ôxy tương ứng. Tuy nhiên, một sự phân loại đầy đủ các nút là cực kỳ cần thiết, và người đã bắt tay để phân loại các nút lại chính là bạn của Thomson, nhà vật lý toán người Scotland Peter

Guthrie Tait (1831-1901).

Thực ra, những loại câu hỏi mà các nhà toán học đặt ra về các nút không khác mấy so với những câu hỏi mà người ta có thể đặt ra về một sợi dây thắt nút thông thường hay một cuộn chỉ rối. Nó có thực sự bị thắt nút hay không? Nút này có tương đương với một nút kia không? Ý nghĩa của câu hỏi sau rất đơn giản: một nút có thể biến thành dạng một nút khác mà không phải làm đứt dây ra hay kéo dây này qua dây khác như các vành nối với nhau của nhà ảo thuật? Tầm quan trọng của câu hỏi này được minh họa ở hình 55, nó cho thấy bằng một số thao tác bằng tay, người ta có thể nhận được hai biểu diễn khác nhau của cùng một nút. Sau hết, lý thuyết nút tìm kiếm con đường chính xác nào đó để chứng minh rằng một số nút (như nút cỏ ba lá và nút hình số 8; H.54b và 54c) là thực sự khác nhau, trong khi không cần đếm xỉa đến sự khác nhau bên ngoài của các nút khác, như hai nút ở hình 55.

Tait bắt đầu công việc phân loại của mình một cách rất khó khăn. Không có một nguyên lý toán học rõ ràng nào dẫn dắt, ông đã lập các danh mục những đường cong có một chỗ bắt chéo, hai chỗ bắt chéo, ba chỗ bắt chéo, và cứ tiếp tục như vậy. Cộng tác với Reverend Thomas Penyngton Kirkman (1806-95), cũng là một nhà toán học không chuyên, ông bắt đầu gạn lọc những đường cong để loại đi những trùng lặp do các nút tương đương. Đây không phải là một nhiệm vụ tầm thường. Bạn phải hiểu rằng, cứ mỗi một lần bắt chéo nhau, có hai cách để chọn sợi dây nào ở trên cùng. Điều này có nghĩa là nếu một đường cong có, giả sử như, 7 chỗ bắt chéo nhau thì sẽ có $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$ nút phải xem xét. Nói cách khác, cuộc sống con người sẽ là quá ngắn để có thể hoàn tất việc phân loại,



Hình 55

theo cách trực giác này, các nút với 10 lần, hoặc nhiều hơn, bắt chéo nhau. Tuy nhiên, công việc của Tait không phải không được đánh giá cao. James Clerk Maxwell vĩ đại, người đã đưa ra thuyết cổ điển về điện và từ, đã rất trân trọng lý thuyết nguyên tử của Thomson, và đã nhận xét rằng "nó đã thỏa mãn nhiều điều kiện hơn bất kỳ lý thuyết về nguyên tử nào được xem xét cho đến nay". Đồng thời nhận rõ sự đóng góp của Tait, Maxwell đã tặng bài thơ sau:

Tháo cuộn dây xoắn
Thành nếp hoàn hảo
Chặn các vòng và mối nối
Rồi xuyên vào nhau

Đến năm 1877, Tait đã phân loại được các nút luân phiên có tới 7 lần bắt chéo nhau. Các nút luân phiên là những nút mà trong đó các chỗ bắt chéo luân phiên lên trên và xuống dưới, giống như sợi chỉ trong một tấm thảm dệt. Tait cũng thực hiện

được một số khám phá thực dụng hơn, dưới dạng các nguyên lý cơ bản mà sau này được đặt tên là những *phỏng đoán của Tait*. Cũng cần nói thêm rằng những phỏng đoán này căn bản đến mức chúng đã cưỡng lại mọi nỗ lực chứng minh chúng một cách chặt chẽ cho mãi đến tận cuối những năm 1980. Năm 1885, Tait đã công bố bảng các nút có tới 10 lần bắt chéo nhau, và ông quyết định dừng ở đó. Một cách độc lập, một giáo sư ở trường Đại học Nebraska là Charles Newton Little (1858-1923) cũng công bố (vào năm 1899) bảng các nút không luân phiên với 10 hoặc ít hơn số lần bắt chéo nhau.

Huân tước Kevin luôn dành tình cảm trìu mến cho Tait. Tại một buổi lễ kỷ niệm tại trường Peterhouse College ở Cambridge, nơi có treo bức chân dung của Tait, Lord Kevin đã nói:

> Tôi nhớ Tait có lần nhận xét rằng không gì khác ngoài khoa học mới xứng đáng để sống vì nó. Đó là lời nói chân thành, nhưng bản thân Tait lại chứng minh rằng điều đó là không đúng. Tait thực sự là một người đọc vĩ đại. Ông đã thuộc lòng Shakespear, Dickens và Thackeray. Trí nhớ của ông thật tuyệt vời. Những điều mà một khi ông đã đọc một cách đồng cảm thì ông sẽ nhớ mãi.

Thật không may là lúc mà Tait và Little hoàn thành công việc khổng lồ của mình trong việc lập bảng các nút thì lý thuyết về nguyên tử của Kelvin lại hoàn toàn bị loại bỏ. Dù vậy, sự quan tâm đến các nút vẫn tiếp tục vì lợi ích của chính nó, chỉ có sự khác biệt là, như nhà toán học Michael Atiyah đã nói, "nghiên cứu về các nút trở thành một nhánh bí truyền của toán học

thuần túy". Một lĩnh vực của toán học, nơi mà các đại lượng như kích thước, độ trơn, và theo một nghĩa nào đó thậm chí cả hình dạng nữa cũng bị bỏ qua được gọi là *tôpô*. Tôpô - hình học của tấm cao su - nghiên cứu những tính chất vẫn còn không thay đổi khi không gian bị kéo giãn hay biến dạng theo bất kỳ cách nào (nhưng không được xé thành từng mảnh hay đục lỗ). Do chính bản chất của chúng, các nút cũng thuộc tôpô. Một cách tình cờ, các nhà toán học cũng đã có sự phân biệt các *nút*, đó là các vòng thắt nút đơn, các *vòng xích*, là tập hợp các vòng thắt nút móc nối với nhau, và *dây tết*, là tập hợp của các sợi dây dọc nối với một thanh ngang ở đầu trên và đầu dưới.

Nếu bạn chưa ấn tượng với khó khăn của việc phân loại các nút, thì hãy xem thực tế rất ấn tượng sau đây. Bảng của Charles Little, công bố vào năm 1899 sau 6 năm làm việc, có chứa 43 nút không luân phiên có 10 lần bắt chéo nhau. Bảng này đã được các nhà toán học xem xét một cách kỹ lưỡng và sau 75 năm năm mới được công nhận là chính xác. Sau đó vào năm 1974, nhà toán học kiêm luật sư ở New York là Kenneth Perko đã tiến hành thực nghiệm với những sợi dây ngay trong phòng khách nhà ông. Trước sự ngạc nhiên của chính mình, ông đã khám phá ra rằng hai trong số nút trong bảng của Little thực tế chỉ là một. Chúng ta giờ thì tin rằng chỉ có 42 nút không luân phiên có 10 lần bắt chéo nhau là thực sự khác nhau.

Trong khi thế kỷ 20 chứng kiến những bước tiến mạnh mẽ của tôpô thì tiến độ của lý thuyết nút lại diễn ra khá chậm. Một trong những mục tiêu chính của các nhà toán học khi nghiên cứu các nút là xác định các tính chất thực sự khác biệt của các nút. Những tính chất như vậy được gọi là các *bất biến của các nút* - chúng biểu thị các đại lượng mà trong đó hai hình chiếu

khác nhau của cùng một nút thì cho chính xác cùng một giá trị. Nói cách khác, một bất biến lý tưởng thực sự là một "dấu vân tay" của nút, đó là một đặc tính của nút không thay đổi trong bất cứ biến dạng nào của nút đó. Có lẽ bất biến đơn giản nhất mà người ta có thể nghĩ tới đó là số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất khi vẽ một nút. Chẳng hạn, cho dù bạn có cố gắng gỡ rối nút ba lá (hình 54b) như thế nào đi nữa thì bạn cũng sẽ không bao giờ làm giảm số lần bắt chéo nhau xuống còn nhỏ hơn ba. Thật không may là có nhiều lý do khiến cho số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất lại không phải là bất biến hữu dụng nhất. Trước hết, như hình 55 cho thấy, không phải bao giờ cũng dễ dàng xác định được một nút đã được vẽ với số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất hay không. Thứ hai và quan trọng hơn cả là nhiều nút thực sự khác nhau lại có cùng số lần bắt chéo nhau. Trong hình 54 chẳng hạn, có ba nút khác nhau có cùng 6 lần bắt chéo nhau. Vì vậy, số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất không phân biệt được hầu hết các nút. Cuối cùng, số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất, do bản chất quá đơn giản của nó, không cung cấp cho ta nhiều hiểu biết sâu sắc về các tính chất của nút nói chung.

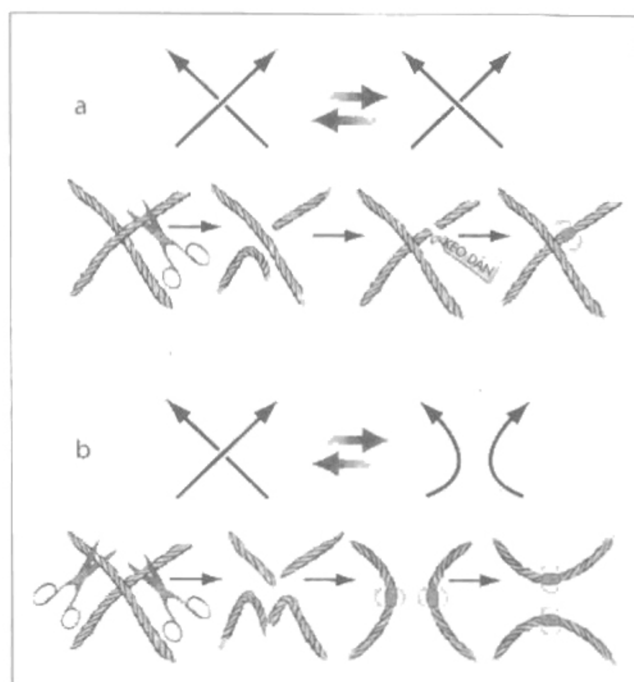
Một sự đột phá trong lý thuyết nút xuất hiện vào năm 1928, khi nhà toán học Mỹ James Waddell Alexander (1888-1971) đã khám phá ra một bất biến quan trọng mà sau này nổi tiếng dưới cái tên *đa thức Alexander*. Về cơ bản, đa thức Alexander là một biểu thức đại số sử dụng sự sắp xếp các chỗ bắt chéo nhau để dán nhãn cho nút. Đặc biệt quan trọng là nếu hai nút có đa thức Alexander khác nhau thì các nút này thực sự là khác nhau. Nhưng điều không hay là hai nút có cùng đa thức vẫn có thể là các nút khác nhau. Vì vậy, mặc dù là rất hữu dụng

song đa thức Alexander vẫn chưa phải là hoàn hảo trong việc phân biệt các nút.

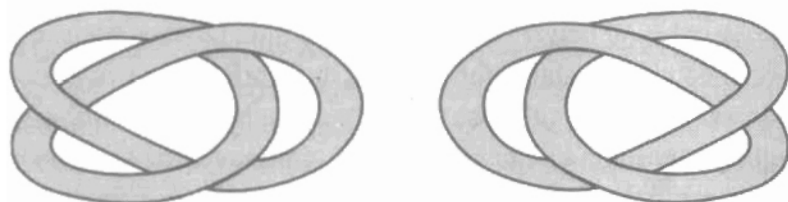
Các nhà toán học đã mất bốn thập kỷ tiếp theo để khám phá cơ sở khái niệm cho đa thức Alexander và thu được những hiểu biết sâu xa hơn về các tính chất của nút. Nhưng tại sao họ lại phải đào sâu vào chủ đề này như vậy? Chắc chắn không phải là vì bất kỳ ứng dụng thực tế nào. Mô hình nguyên tử của Thomson đã bị lãng quên từ lâu và không có vấn đề gì khác có thể nhìn thấy trong khoa học, kinh tế học, kiến trúc hay lĩnh vực nào khác có vẻ đòi hỏi một lý thuyết nút cả. Các nhà toán học đã phải dành vô số thời gian cho các nút chỉ là bởi vì họ tò mò mà thôi! Với những cá nhân này, ý tưởng tìm hiểu các nút và các nguyên lý chi phối chúng là cực kỳ đẹp đẽ. Sự lóe sáng bất ngờ của sự hiểu biết sâu sắc tạo ra bởi đa thức Alexander thực sự là không thể cưỡng lại được đối với các nhà toán học cũng giống như thách thức trèo lên đỉnh núi Everest đối với George Mallory, người đã có câu trả lời nổi tiếng "Vì nó ở đó" cho câu hỏi tại sao ông lại muốn trèo lên ngọn núi đó.

Vào cuối những năm 1960, một nhà toán học người Mỹ gốc Anh là John Horton Conway đã khám phá ra một thủ tục "tháo gỡ" các nút, và từ đó phát lộ ra mối quan hệ nằm ẩn bên dưới giữa các nút và đa thức Alexander của chúng. Đặc biệt, Conway đã giới thiệu hai "phẫu thuật" đơn giản có thể dùng làm cơ sở để xác định một bất biến của nút. Hai phẫu thuật của Conway, có tên là *lật* và *làm trơn*, được mô tả dưới dạng sơ đồ trong hình 56. Trong phép lật (H.56a), chỗ bắt chéo nhau được biến đổi bằng cách chuyển sợi dây nằm trên xuống dưới sợi dây nằm dưới (hình cũng chỉ rõ cách mà người ta thực hiện biến đổi đó với một nút thực của một sợi dây). Lưu ý rằng phép lật thay

đổi một cách rõ ràng bản chất của nút. Chẳng hạn, bạn có thể dễ dàng tin rằng nút ba lá ở hình 54b sẽ trở thành không nút (H. 54a) bằng phép lật. Phép làm trơn của Conway loại bỏ sự bắt chéo nhau (H. 56b), bằng cách tái nối lại các sợi dây theo cách "sai". Nhưng ngay cả với những hiểu biết mới thu được từ công trình của Conway, các nhà toán học vẫn còn tin trong gần hai thập kỷ nữa rằng sẽ không thể tìm được bất biến nút nào khác (ngoài đa thức Alexander). Và tình hình này đã đột ngột thay đổi vào năm 1984.



Hình 56



Hình 57

Nhà toán học người Mỹ gốc New Zealand là Vaughan Jones hoàn toàn không nghiên cứu gì về nút cả. Thay vì thế, ông lại tìm hiểu một thế giới thậm chí còn trừu tượng hơn - một trong những thực thể toán học có tên là *đại số von Neumann.* Tình cờ, Jones nhận thấy có mối quan hệ nổi lên trong đại số von Neumann trông tương tự một cách đáng ngờ với một mối quan hệ trong lý thuyết nút, và ông đã tới gặp nhà lý thuyết nút Joan Birman của Đại học Columbia để thảo luận về những ứng dụng khả dĩ. Một nghiên cứu về mối quan hệ này cuối cùng cũng đã phát lộ một bất biến hoàn toàn mới của nút, được gọi là *đa thức Jones.* Đa thức Jones ngay lập tức được thừa nhận là một bất biến nhạy cảm hơn cả đa thức Alexander. Chẳng hạn, đa thức này phân biệt được các nút và hình ảnh của chúng qua gương (ví dụ như nút ba lá thuận trái và thuận phải trên H. 57), trong khi đối với chúng đa thức Alexander giống hệt nhau. Tuy nhiên, điều quan trọng hơn nữa là khám phá của Jones đã tạo nên sự hưng phấn chưa từng thấy trong lý thuyết nút. Thông báo về một bất biến mới đã khởi phát một làn sóng nghiên cứu sôi nổi tới mức thế giới nút đột nhiên giống như sàn giao dịch chứng khoán vào ngày mà Cục dự trữ liên bang bất ngờ hạ lãi suất.

Trong khám phá của Jones còn hàm chứa nhiều điều nữa, chứ không chỉ là sự tiến triển trong lý thuyết nút. Đa thức Jones đột nhiên đã kết nối nhiều lĩnh vực còn đang lúng túng trong toán học và vật lý học, từ cơ học thống kê (chẳng hạn, sử dụng để nghiên cứu hành vi của tập hợp lớn các nguyên tử hoặc phân tử) đến các nhóm lượng tử (một nhánh của toán học có liên quan đến vật lý của thế giới hạ nguyên tử). Các nhà toán học trên khắp thế giới đắm chìm một cách háo hức vào những nỗ lực để tìm kiếm những bất biến thậm chí còn tổng quát hơn để bằng cách nào đó bao hàm được cả đa thức Alexander và đa thức Jones. Cuộc chạy đua toán học này cuối cùng đã kết thúc ở điểm mà có lẽ là kết quả đáng kinh ngạc nhất trong lịch sử cạnh tranh khoa học. Chỉ một vài tháng sau khi Jones công bố đa thức mới của mình, bốn nhóm, làm việc độc lập và sử dụng ba cách tiếp cận toán học khác nhau, đã thông báo *đồng thời* rằng họ đã khám phá ra một bất biến thậm chí còn nhạy hơn nữa. Đa thức mới này được gọi là *đa thức HOMFLY*, ghép từ chữ cái đầu trong tên của những người đã khám phá ra bất biến đó: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish và Yetter. Hơn thế nữa, cứ như thể bốn nhóm này chạm vạch đích đồng thời vẫn còn chưa đủ vậy, hai nhà toán học Ba Lan (Przytycki và Traczyk) cũng đã độc lập khám phá ra đa thức chính xác như thế song họ đã lỡ mất ngày công bố do hệ thống bưu điện trục trặc. Do đó, đa thức này cũng còn được gọi là HOMFLYPT (hay đôi khi là THOMFLYP), bổ sung thêm chữ cái đầu trong tên của các nhà toán học Ba Lan.

Kể từ đó, trong khi các bất biến nút khác vẫn được tiếp tục khám phá thì người ta vẫn chưa có được trong tay một sự phân loại hoàn chỉnh. Câu hỏi chính xác là nút nào có thể

vặn và quay để tạo ra một nút khác mà không phải sử dụng kéo vẫn còn chưa có câu trả lời. Bất biến hiện đại nhất đến nay là công trình của nhà toán học người Pháp gốc Nga Maxim Kontsevich, người đã nhận giải Fields danh giá vào năm 1998 và giải Crafoord vào năm 2008. Tình cờ, vào năm 1998, Jim Hoste thuộc trường Pitzer College ở Claremont, California, và Jeffrey Weeks ở Canton, New York, đã lập bảng tất cả các nút với 16 lần bắt chéo nhau hoặc ít hơn. Một bảng giống hệt như vậy cũng đã được lập một cách độc lập bởi Morwen Thistlethwaite của Đại học Tennessee ở Knoxville. Mỗi danh sách đều chứa chính xác là 1.701.936 nút khác nhau!

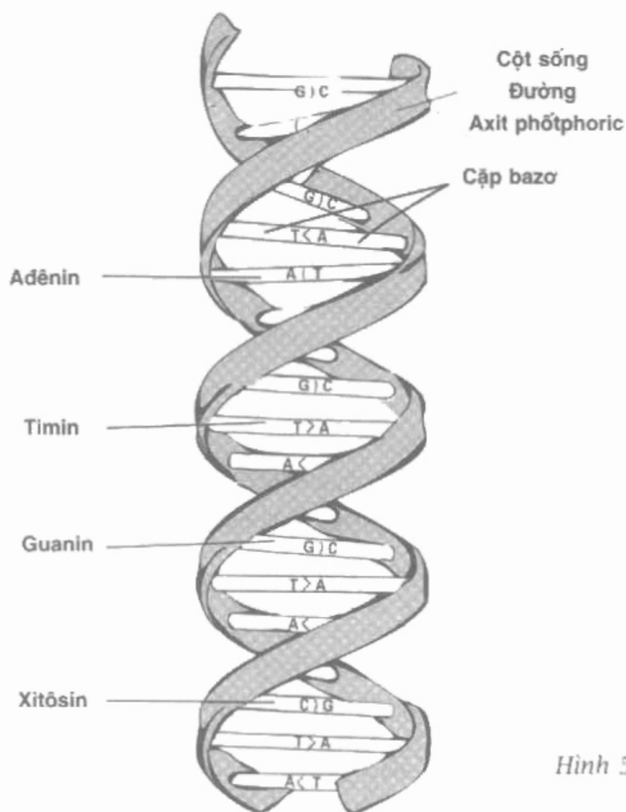
Tuy nhiên, điều thực sự đáng ngạc nhiên lại không phải đến chủ yếu từ sự tiến triển của bản thân lý thuyết nút mà là từ sự trở lại ngoạn mục và đầy bất ngờ của lý thuyết nút trong phạm vi rộng lớn của các khoa học.

Các nút của sự sống

Hãy nhớ lại rằng lý thuyết nút được thúc đẩy bởi một mô hình nguyên tử sai. Tuy nhiên, khi mô hình đó chết đi, các nhà toán học vẫn không nhụt chí. Mà ngược lại, với sự hứng khởi mạnh mẽ, họ vẫn tiếp tục lao vào cuộc hành trình dài và đầy khó khăn để cố gắng tìm hiểu chính bản thân các nút. Hãy thử hình dung xem sự vui sướng của họ sẽ lớn lao biết chừng nào khi mà lý thuyết nút bất ngờ hóa ra lại là chìa khóa để tìm hiểu những quá trình cơ bản có liên quan đến các phân tử của sự sống. Liệu bạn có còn cần một ví dụ còn tốt hơn thế về vai trò "thụ động" của toán học thuần túy trong việc giải thích tự nhiên nữa hay không?

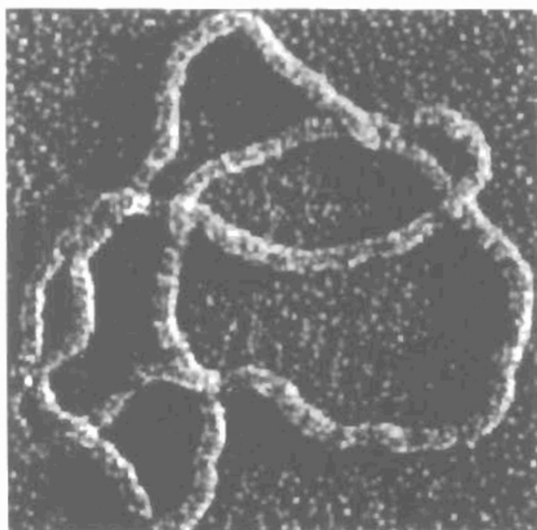
Axit điôxit ribônuclêic, hay ADN, là vật liệu di truyền của mọi tế bào. Nó gồm hai mạch (dây) rất dài xoắn xung quanh nhau hàng triệu lần để tạo nên một chuỗi xoắn kép. Dọc hai xương sống (hai mạch), mà ta có thể coi như hai tay vịn của một cái thang xoắn, các phân tử đường và axit phốtphoric sắp xếp xen kẽ nhau. Còn các "bậc" thang là các cặp bazơ kết nối với nhau bằng liên kết hyđrô theo một cách thức đã được ấn định (ađênin chỉ liên kết với timin và xitôsin chỉ liên kết với guanin; H.58). Khi một tế bào phân chia, bước đầu tiên là sao chép ADN, sao cho các tế bào con có thể nhận được các bản sao. Tương tự như vậy, trong quá trình *phiên mã* (trong đó các thông tin di truyền từ ADN được sao cho ARN), một đoạn của chuỗi xoắn kép ADN duỗi ra và chỉ một mạch đơn của ADN đóng vai trò khuôn mẫu. Sau khi sự tổng hợp các ARN hoàn tất, ADN lại cuộn trở lại chuỗi xoắn của nó. Tuy nhiên, cả quá trình sao chép lẫn phiên mã đều không dễ dàng vì ADN thắt nút và xoắn chặt (để nén sự lưu trữ thông tin) tới mức nếu không có cơ chế tháo gỡ nào đó được thực hiện thì quá trình cơ bản này của sự sống không thể được tiến hành một cách suôn sẻ. Thêm vào đó, để quá trình sao chép hoàn tất, các phân tử ADN con phải được gỡ nút, và ADN bố mẹ cuối cùng lại phải trở về cấu hình ban đầu của nó.

Tác nhân chịu trách nhiệm gỡ nút và gỡ rối là các enzyme. Enzyme có thể luồn một mạch đơn ADN qua mạch kia bằng việc cắt đứt tạm thời rồi nối lại hai đầu một cách khác nhau. Bạn có thấy quá trình này nghe có vẻ quen quen không? Đó chính xác là những phẫu thuật mà Conway đã đưa vào để khám phá các nút toán học (được biểu diễn trên H.56). Nói cách khác, theo quan điểm tôpô, ADN chính là một nút phức hợp phải được



Hình 58

gỡ nút bằng các enzyme để cho việc sao chép và phiên mã có thể diễn ra. Bằng cách sử dụng lý thuyết nút để tính toán mức độ khó khăn trong việc tháo gỡ nút ADN, các nhà nghiên cứu có thể tìm hiểu các tính chất của những enzyme thực hiện việc tháo gỡ nút đó. Còn tốt hơn nữa là bằng cách sử dụng các kỹ thuật hiển thị bằng thực nghiệm như kính hiển vi điện tử và điện chuyển gel, các nhà khoa học đã có thể thực sự quan sát và định lượng được sự thay đổi trong thắt nút và liên kết của



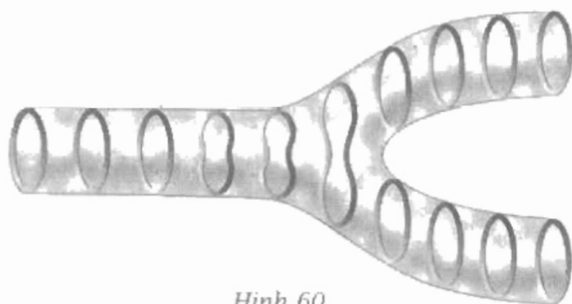
Hình 59

ADN tạo bởi các enzyme (H.59 cho thấy một bức ảnh hiển vi điện tử của một nút thắt của ADN). Thách thức đối với các nhà toán học khi này là suy ra cơ chế vận hành của các enzyme từ những thay đổi quan sát được trong tôpô của ADN. Như là một sản phẩm phụ, sự thay đổi số lần bắt chéo nhau trong nút ADN giúp các nhà sinh học đo được *tốc độ phản ứng* của các enzyme - một enzyme có nồng độ đã cho có thể ảnh hưởng đến bao nhiêu chỗ bắt chéo nhau trong một phút.

Song sinh học phân tử không phải là lĩnh vực duy nhất mà lý thuyết nút có những ứng dụng không lường trước. Lý thuyết dây - nỗ lực hiện nay nhằm xây dựng một lý thuyết thống nhất giải thích được tất cả các lực trong tự nhiên - cũng có liên quan đến các nút.

Vũ trụ nằm trên một sợi dây?

Hấp dẫn là một lực hoạt động ở thang lớn nhất. Nó giữ cho các ngôi sao trong các thiên hà cụm lại với nhau và ảnh hưởng đến sự giãn nở của vũ trụ. Thuyết tương đối rộng của Einstein là một lý thuyết quan trọng về hấp dẫn. Ở sâu bên trong các hạt nhân nguyên tử, các lực khác và một lý thuyết khác giữ vai trò thống trị tối thượng. Lực hạt nhân mạnh liên kết các hạt có tên là *quark* tạo nên các prôton và nơtron quen thuộc, những thành phần cơ bản của vật chất. Hành vi của các hạt và các lực trong thế giới hạ nguyên tử được chi phối bởi các định luật của cơ học lượng tử. Vậy liệu quark và các thiên hà có chơi theo cùng một luật hay không? Các nhà vật lý thì tin rằng chúng phải như vậy, mặc dù họ còn chưa biết là tại sao. Trong nhiều thập kỷ, các nhà vật lý đã nỗ lực tìm kiếm một "lý thuyết của vạn vật" - một sự mô tả bao quát được các quy luật của tự nhiên. Đặc biệt, họ muốn bắc một cầu nối qua khoảng trống giữa những cái vô cùng lớn và những cái vô cùng bé bằng lý thuyết lượng tử của hấp dẫn - một sự dung hòa giữa thuyết tương đối rộng và cơ học lượng tử. Lý thuyết dây dường như là sự đánh cược tốt nhất hiện nay cho một lý thuyết như vậy của vạn vật. Nguyên được phát triển và bị vùi dập như là một lý thuyết về lực hạt nhân, lý thuyết dây đã hồi sinh từ bóng tối vào năm 1974 bởi nhà vật lý John Schwarz và Joel Scherk. Ý tưởng cơ bản của thuyết dây hết sức đơn giản. Lý thuyết này chủ trương rằng các hạt cơ bản hạ nguyên tử, như electron và quark, không phải là các thực thể có dạng điểm, không có cấu trúc. Mà thực ra, các hạt cơ bản biểu diễn các mode dao động khác nhau của cùng một dây cơ bản. Theo các ý tưởng này, vũ



Hình 60

trụ được choán đầy bởi những vòng dây đàn hồi, giống như một dây cao su bé xíu. Giống như khi một dây đàn violon được gảy lên sẽ tạo ra những hòa âm khác nhau thì những dao động khác nhau của các vòng dây kín này sẽ tương ứng với các hạt vật chất khác nhau. Nói cách khác, thế giới là cái gì đó tựa như một bản giao hưởng vậy.

Vì các dây là những vòng kín di chuyển qua không gian, nên theo thời gian, chúng quét nên các mặt (gọi là *mặt vũ trụ*) có dạng là một mặt trụ (như trên H.60). Nếu một dây phát ra các dây khác, thì mặt trụ này sẽ phân nhánh tạo thành các cấu trúc có dạng xương đòn. Khi nhiều dây tương tác với nhau, chúng tạo nên một mạng phức tạp các vỏ giống như hình chiếc xăm ôtô hợp lại với nhau. Trong khi nghiên cứu các loại cấu trúc tôpô phức tạp này, hai nhà lý thuyết dây là Hirosi Ooguri và Cumrun Vafa đã khám phá ra mối liên kết thú vị giữa số các vỏ hình chiếc xăm ôtô, các tính chất hình học nội tại của các nút, và đa thức Jones. Thậm chí trước đó, Ed Witten - một trong những nhân vật chủ chốt trong lý thuyết dây - đã tạo nên một mối quan hệ không hề ngờ tới giữa đa thức Jones và chính nền tảng của lý thuyết dây (mà thường được gọi là *thuyết trường*

lượng tử). Mô hình của Witten sau này đã được tư duy lại từ quan điểm toán học thuần túy bởi nhà toán học Michael Atiyah. Vì vậy lý thuyết dây và lý thuyết nút đã chung sống cộng sinh một cách tuyệt vời. Một mặt, lý thuyết dây hưởng lợi từ các kết quả của lý thuyết nút; mặt khác, lý thuyết dây thực sự dẫn đến những hiểu biết mới trong lý thuyết nút.

Với phạm vi đã được mở rộng thêm nhiều, lý thuyết dây tìm kiếm những lý giải cho các thành phần cơ bản nhất cấu tạo nên vật chất, rất giống với cách thức mà Thomson trước đó tìm kiếm một lý thuyết về nguyên tử. Thomson đã quan niệm (một cách sai lầm) rằng các nút có thể cung cấp cho ông câu trả lời. Bằng một bước ngoặt bất ngờ, các nhà lý thuyết dây phát hiện ra rằng các nút thực sự có thể cung cấp chí ít là một số câu trả lời. Câu chuyện về lý thuyết nút đã minh họa một cách đẹp đẽ cho sức mạnh không ngờ tới của toán học. Như tôi đã nhắc tới ở trên, thậm chí chỉ riêng mặt "chủ động" của tính hiệu quả của toán học không thôi - khi mà các nhà khoa học tạo ra toán học mà họ cần đến để mô tả khoa học quan sát được - cũng đã cho thấy một số điều ngạc nhiên kỳ lạ khi liên quan tới độ chính xác. Tôi sẽ mô tả một cách ngắn ngọn một chủ đề trong vật lý học mà ở đó cả khía cạnh chủ động cũng như thụ động đều đóng vai trò quan trọng, nhưng đặc biệt đáng kể là bởi vì độ chính xác có được.

Một độ chính xác nặng ký

Newton lấy những quy luật của các vật rơi được khám phá bởi Galileo và các nhà thực nghiệm Italia khác, kết hợp chúng với

ba định luật chuyển động của các hành tinh được thiết lập bởi Kepler, và đã sử dụng sơ đồ thống nhất này để đưa ra một định luật toán học phổ quát về hấp dẫn. Trên con đường đó, Newton đã phải tạo ra một lĩnh vực hoàn toàn mới của toán học - phép tính vi tích phân - cho phép ông nắm bắt được một cách súc tích và mạch lạc tất cả những tính chất của các định luật mà ông đề xuất về chuyển động và hấp dẫn. Độ chính xác mà bản thân Newton xác minh định luật của mình về hấp dẫn, từ các kết quả từ quan sát và thí nghiệm vào thời ông, là không quá 4%. Song định luật này được chứng minh là chính xác vượt quá cả những mong đợi hợp lý. Đến những năm 1950, độ chính xác thực nghiệm đã tốt hơn một phần mười ngàn %. Nhưng đó còn chưa phải là tất cả. Gần đây hơn, một số lý thuyết có tính tư biện, nhằm giải thích thực tế là sự giãn nở của vũ trụ dường như đang tăng tốc, đã cho rằng lực hấp dẫn có thể thay đổi hành vi của nó ở những thang khoảng cách rất nhỏ. Theo định luật của Newton, lực hấp dẫn giảm tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách. Tức là, nếu bạn tăng gấp đôi khoảng cách giữa hai khối lượng, thì lực hấp dẫn mà mỗi khối lượng phải chịu yếu đi bốn lần. Các kịch bản mới tiên đoán sẽ có sự sai lệch so với phát biểu của Newton ở những khoảng cách nhỏ hơn một milimét. Eric Adelberger, Daniel Kapner và các cộng sự của họ ở Đại học Washington, Seatle, đã tiến hành một loạt những thí nghiệm tài tình để kiểm tra sự thay đổi quy luật phụ thuộc vào khoảng cách đã được tiên đoán này. Kết quả gần đây nhất của họ, được công bố vào tháng 1 năm 2007, cho thấy định luật nghịch đảo-bình phương vẫn còn đúng cho tới khoảng cách năm mươi sáu phần ngàn mm! Như vậy, một định luật toán học được đề xuất hơn 300 năm trước, dựa

trên những quan sát rất nghèo nàn, không chỉ hóa ra là chính xác một cách đáng kinh ngạc, mà còn được chứng minh là vẫn đúng trong một phạm vi thậm chí không thể thăm dò được được cho đến tận rất gần đây.

Có một câu hỏi quan trọng mà Newton hoàn toàn không trả lời được: lực hấp dẫn thực sự đã vận hành như thế nào? Làm thế nào mà Trái đất, ở cách xa Mặt trăng tới 1/4 triệu dặm, lại có thể ảnh hưởng đến chuyển động của Mặt trăng? Newton đã ý thức được khiếm khuyết đó trong lý thuyết của mình và ông đã công khai thừa nhận nó trong cuốn *Principia*:

> Cho đến đây, chúng ta đã giải thích được các hiện tượng trên trời và dưới biển bằng sức mạnh của lực hấp dẫn, nhưng vẫn chưa tìm ra được nguyên nhân của sức mạnh này. Điều chắc chắn là, nó phải phát sinh từ một nguyên nhân xâm nhập tới tận trung tâm của Mặt trời và các hành tinh... và truyền lực của nó đi mọi phía tới những khoảng cách khổng lồ, và luôn giảm theo quy luật tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách... Song cho đến nay, tôi vẫn chưa thể khám phá ra được nguyên nhân của các tính chất này của hấp dẫn từ các hiện tượng và tôi cũng không có giả thuyết nào.

Người quyết định chấp nhận thách thức mà Newton còn bỏ lại là Albert Einstein (1879-1955). Đặc biệt là vào năm 1907, Einstein đã có một lý do rất mạnh mẽ để quan tâm đến hấp dẫn - lý thuyết mới của ông, tức *thuyết tương đối hẹp*, dường như mâu thuẫn trực tiếp với định luật vạn vật hấp dẫn của Newton.

Newton tin rằng tác dụng của lực hấp dẫn là tức thời. Ông

cho rằng các hành tinh không hề mất một chút thời gian nào để cảm nhận được lực hấp dẫn của Mặt trời, hay quả táo cảm nhận được lực hấp dẫn của Trái đất. Mặt khác, cột trụ trung tâm của thuyết tương đối hẹp của Einstein là phát biểu rằng: không một đối tượng, năng lượng, hay thông tin nào có thể di chuyển nhanh hơn tốc độ ánh sáng. Vậy thì làm sao lực hấp dẫn lại có thể hoạt động một cách tức thời được? Như ví dụ dưới đây cho thấy, những hệ quả của mâu thuẫn này có thể là thảm họa đối với các khái niệm cơ bản như nhận thức của chúng ta về nguyên nhân và kết quả.

Hãy thử hình dung rằng, bằng cách nào đó, Mặt trời đột nhiên biến mất. Bị mất đi lực vẫn giữ cho nó ở trên quỹ đạo của mình, Trái đất (theo Newton) sẽ ngay lập tức bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng (ngoài độ lệch nhỏ gây ra bởi lực hấp dẫn của các hành tinh khác). Tuy nhiên, Mặt trời sẽ chỉ biến mất khỏi tầm mắt của các cư dân trên Trái đất chỉ sau đó khoảng 8 phút, vì đó là thời gian ánh sáng đi hết khoảng cách từ Mặt trời đến Trái đất. Nói cách khác, nếu theo Newton thì sự thay đổi trong chuyển động của Trái đất sẽ diễn ra trước khi Mặt trời biến mất.

Để loại bỏ mâu thuẫn này, và đồng thời giải quyết câu hỏi chưa được trả lời của Newton, với một tâm trạng đầy ám ảnh, Einstein đã dấn thân tìm kiếm một lý thuyết hấp dẫn mới. Đó là một nhiệm vụ kỳ vĩ. Bất kỳ một lý thuyết mới nào không chỉ phải giữ lại được tất cả những thành công to lớn của lý thuyết Newton mà còn phải lý giải được lực hấp dẫn hoạt động như thế nào, và phải làm điều đó theo một cách tương thích với thuyết tương đối hẹp. Sau nhiều sự khởi đầu sai lầm và lang thang rất lâu trong những ngõ cụt, cuối cùng Einstein đã đạt

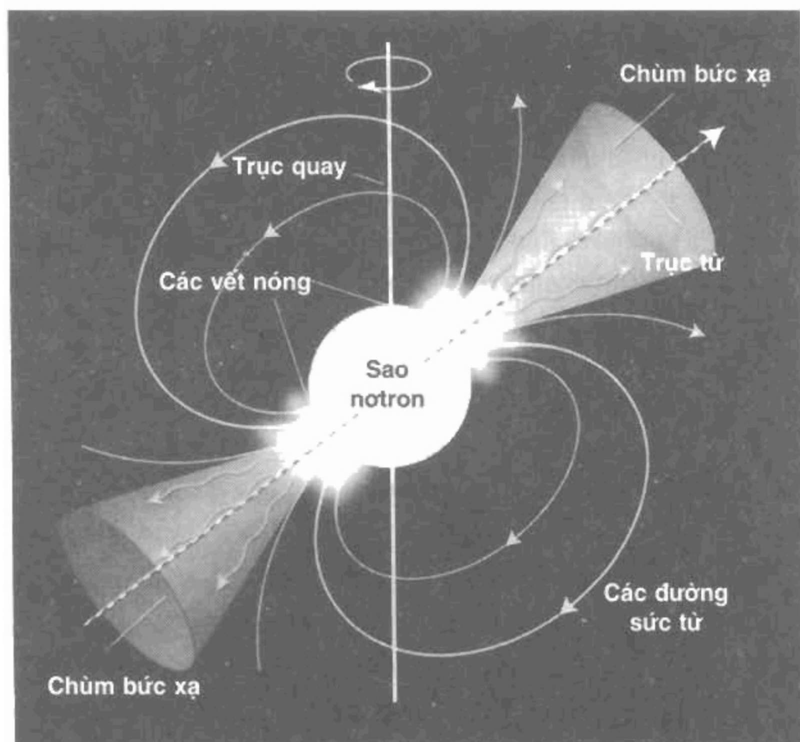
được mục đích của mình vào năm 1915. *Thuyết tương đối rộng* của ông hiện vẫn còn được nhiều người xem như là một trong những lý thuyết đẹp nhất mà con người từng tạo ra.

Tâm điểm của cái nhìn sâu sắc mang tính đột phá của Einstein nằm ở ý tưởng cho rằng hấp dẫn không là gì khác hơn là sự uốn cong trong cấu trúc của không gian và thời gian. Theo Einstein, giống như những quả bóng *golf* được dẫn dắt bởi những chỗ uốn cong của thảm cỏ uốn lượn, các hành tinh cũng đi theo những đường cong trong không gian bị uốn cong biểu diễn hấp dẫn của Mặt trời. Nói cách khác, khi không có vật chất hay các dạng khác của năng lượng, *không thời gian* (cấu trúc thống nhất của ba chiều không gian và một chiều thời gian) sẽ là phẳng. Vật chất và năng lượng sẽ làm cong không thời gian giống như một quả bóng bowling nặng làm cho một tấm cao su căng bị võng xuống. Các hành tinh sẽ đi theo những con đường ngắn nhất trong hình học cong này, một hình học là sự biểu hiện của hấp dẫn. Bằng cách giải được bài toán "vận hành như thế nào" của hấp dẫn, Einstein cũng đồng thời cung cấp một khuôn khổ cho việc giải đáp câu hỏi nó truyền đi nhanh như thế nào. Câu hỏi sau được quy về việc xác định sự uốn cong trong không thời gian có thể di chuyển nhanh như thế nào. Điều này khá giống với việc tính toán tốc độ của các gợn sóng trên mặt hồ. Trong thuyết tương đối rộng, Einstein đã chứng tỏ được rằng hấp dẫn di chuyển đúng bằng tốc độ ánh sáng, và điều này loại bỏ được sự không nhất quán đã tồn tại giữa lý thuyết của Newton và thuyết tương đối hẹp. Nếu Mặt trời biến mất, sự thay đổi quỹ đạo của Trái đất sẽ xuất hiện sau đó 8 phút, trùng khớp với việc chúng ta nhìn thấy sự biến mất của Mặt trời.

Việc Einstein đã biến không thời gian cong bốn chiều thành hòn đá tảng cho lý thuyết mới của mình về vũ trụ có nghĩa là ông thực sự cần đến một lý thuyết toán học cho các đối tượng hình học đó. Trong sự tuyệt vọng, ông đã tâm sự với người bạn học cũ, nhà toán học Marcel Grossmann (1878-1936): "Mình đã thấm nhuần tầm quan trọng vĩ đại của toán học, những phần tinh tế hơn của những điều mà trước đây mình vẫn coi là hoàn toàn xa xỉ". Grossmann đã chỉ ra rằng hình học phi Euclid của Riemann (được mô tả trong Chương 6) chính là công cụ mà Einstein cần - đó là hình học của các không gian cong với số chiều bất kỳ. Đây là một minh họa không thể tưởng tượng nổi cho cái mà tôi gọi là tính hiệu quả "thụ động" của toán học, điều mà Einstein đã nhanh chóng thừa nhận: "Thực tế, chúng ta có thể xem [hình học] như là một nhánh cổ nhất của vật lý học," ông tuyên bố. "Không có nó tôi sẽ không thể nào xây dựng được thuyết tương đối".

Thuyết tương đối rộng cũng đã được kiểm chứng với sự chính xác đầy ấn tượng. Những kiểm chứng này không dễ dàng thực hiện, vì độ cong của không thời gian được tạo ra bởi các đối tượng như Mặt trời, chỉ cỡ vài phần triệu. Trong khi những kiểm chứng ban đầu đều liên quan đến những quan sát trong hệ Mặt trời (ví dụ như những thay đổi nhỏ trong quỹ đạo của Thủy tinh, khi so sánh với những tiên đoán trong lý thuyết hấp dẫn của Newton), thì những kiểm chứng kỳ lạ hơn gần đây đã trở nên khả thi. Một trong những xác nhận tốt nhất là sử dụng một đối tượng thiên văn học có tên là *pulsar kép*.

Pulsar là một ngôi sao nén chặt một cách khác thường và phát ra sóng vô tuyến, với khối lượng lớn hơn đôi chút khối lượng của Mặt trời nhưng bán kính thì chỉ khoảng 6 dặm. Mật



Hình 61

độ của một sao như vậy (còn thường được gọi là *sao nơtron*) cao đến mức mà vật chất của nó chứa trong một khối lập phương mỗi cạnh 1 insơ nặng tới khoảng một tỷ tấn. Nhiều sao nơtron quay rất nhanh, đồng thời phát ra sóng vô tuyến từ các cực từ của nó. Khi trục từ hơi nghiêng so với trục quay (như trên H. 61), chùm sóng vô tuyến từ một cực đã cho có thể cắt ngang qua đường nhìn của chúng ta chỉ một lần trong mỗi vòng quay, giống như sự lóe lên của ánh sáng từ một ngọn hải đăng. Trong trường hợp này, sự phát ra sóng vô tuyến dường bị xung động

(pulsed) - từ đó mà nó có tên là "pulsar". Trong trường hợp hai pulsar quay quanh khối tâm chung theo một quỹ đạo kín, thì tạo nên một hệ pulsar kép.

Có hai tính chất khiến pulsar kép trở thành phòng thí nghiệm tuyệt vời để kiểm chứng thuyết tương đối rộng: (1) Các pulsar vô tuyến là những đồng hồ tuyệt vời - tốc độ quay của chúng ổn định đến mức mà trong thực tế, chúng còn vượt hơn cả đồng hồ nguyên tử về độ chính xác; và (2) Các pulsar bị nén chặt đến mức mà trường hấp dẫn của chúng rất mạnh, tạo ra những hiệu ứng tương đối tính rất đáng kể. Những đặc điểm này cho phép các nhà thiên văn học đo được một cách rất chính xác những thay đổi về thời gian di chuyển của ánh sáng từ các pulsar đến Trái đất gây ra bởi chuyển động quay của hai pulsar trong trường hấp dẫn của nhau.

Kiểm chứng gần đây nhất là kết quả của những quan sát định thời chính xác tiến hành trong khoảng thời gian hai năm rưỡi đối với hệ pulsar kép tên là PSR J0737-3039A/B ("số điện thoại" dài này biểu thị tọa độ của hệ trên bầu trời). Hai pulsar trong hệ này quay trọn một vòng theo quỹ đạo của chúng chỉ trong hai giờ hai mươi phút đồng hồ, và hệ này cách Trái đất khoảng 2000 năm ánh sáng (một năm ánh sáng là khoảng cách mà ánh sáng đi được trong một năm trong môi trường chân không; tức là khoảng 6 ngàn tỷ dặm). Một nhóm các nhà thiên văn dẫn đầu là Michael Kramer của Đại học Manchester đã đo được các hiệu chỉnh tương đối tính so với chuyển động theo Newton. Kết quả, được công bố vào tháng 10 năm 2006, hoàn toàn phù hợp với giá trị được tiên đoán bởi thuyết tương đối rộng với sai số khoảng 0,05%!

Thật tình cờ, cả thuyết tương đối rộng lẫn thuyết tương đối

hẹp đều đóng vai trò quan trọng trong *Hệ định vị toàn cầu (GPS)* giúp chúng ta nhanh chóng tìm được vị trí của mình trên bề mặt Trái đất và đường đi từ vị trí này đến vị trí khác, dù là đi ôtô, máy bay hay đi bộ. GPS xác định vị trí hiện tại của máy thu bằng cách đo thời gian tín hiệu đi từ một số vệ tinh đến nó và bằng phương pháp tam giác đạc (giải tam giác) dựa vào vị trí của mỗi vệ tinh đó. Thuyết tương đối hẹp tiên đoán rằng đồng hồ nguyên tử trên các vệ tinh chạy chậm hơn (vào khoảng một vài phần triệu giây mỗi ngày) so với trên mặt đất vì chuyển động tương đối của chúng. Đồng thời, thuyết tương đối rộng lại tiên đoán rằng đồng hồ vệ tinh chạy nhanh hơn (khoảng vài chục phần triệu giây mỗi ngày) so với trên mặt đất vì thực tế là ở trên cao bề mặt của Trái đất, độ cong trong không thời gian gây ra bởi khối lượng của Trái đất là nhỏ hơn. Nếu không làm những bổ chính cần thiết cho hai hiệu ứng quan trọng này, thì những sai số trong định vị toàn cầu có thể tích tụ với tốc độ hơn 5 dặm mỗi ngày.

Lý thuyết hấp dẫn chỉ là một trong nhiều ví dụ minh họa sự tương thích một cách kỳ diệu và độ chính xác đáng kinh ngạc của sự phát biểu toán học các định luật của tự nhiên. Trong trường hợp này, cũng như trong rất nhiều trường hợp khác, cái mà chúng ta nhận được từ các phương trình nhiều hơn rất nhiều so với những cái mà chúng ta ban đầu đặt vào chúng. Độ chính xác của các lý thuyết của Newton và Einstein đã chứng minh độ chính xác vượt quá xa của những quan sát mà các lý thuyết này ban đầu cố gắng giải thích.

Có lẽ ví dụ tốt nhất về độ chính xác đáng kinh ngạc mà một lý thuyết toán học có thể đạt được, đó là *điện động lực học lượng tử (QED)*, lý thuyết mô tả tất cả các hiện tượng có liên

quan đến các hạt tích điện và ánh sáng. Năm 2006, một nhóm các nhà vật lý thuộc Đại học Harvard đã xác định mômen từ của electron (đại lượng cho biết electron tương tác với từ trường mạnh yếu như thế nào) chính xác đến 8 phần ngàn tỷ. Đây là một chiến công phi thường về mặt thực nghiệm. Song bạn có thể bổ sung thêm thực tế rằng hầu hết những tính toán lý thuyết gần đây nhất dựa trên QED đều đạt được độ chính xác tương tự và rằng hai kết quả phù hợp nhau với độ chính xác trở nên gần như không thể tin nổi. Khi nghe về QED vẫn tiếp trục thành công, một trong những nhà sáng lập QED, nhà vật lý Freeman Dyson, đã phải thốt lên: "Tôi thực sự sửng sốt trước thực tế là Tự nhiên lại nhảy một cách cực kỳ chính xác theo đúng cái giai điệu mà chúng tôi đã viết một cách vội vàng 57 năm trước, và trước việc các nhà thực nghiệm và lý thuyết lại có thể đo đạc và tính toán được chính xác vũ điệu của Tự nhiên đến một phần ngàn tỷ".

Nhưng độ chính xác không phải là lý do duy nhất mang lại tiếng tăm cho các lý thuyết toán học, một lý do nữa là sức mạnh tiên đoán của chúng. Tôi sẽ chỉ đưa ra hai ví dụ, một từ thế kỷ 19 và một từ thế kỷ 20 để minh họa cho sức mạnh này. Lý thuyết thứ nhất tiên đoán một hiện tượng mới và lý thuyết thứ hai tiên đoán sự tồn tại của các hạt cơ bản mới.

James Clerk Maxwell, người xây dựng lý thuyết điện từ cổ điển, đã chứng tỏ vào năm 1864 rằng lý thuyết này tiên đoán các điện trường hoặc từ trường biến thiên sẽ sinh ra các sóng lan truyền. Các sóng này - tức các sóng điện từ quen thuộc (ví dụ như sóng vô tuyến) - lần đầu tiên đã được dò thấy bởi nhà vật lý người Đức Heinrich Hertz (1857-94) trong một loạt những thí nghiệm được thực hiện vào cuối những năm 1880.

Vào cuối những năm 1960, các nhà vật lý Steven Weinberg, Sheldon Glashow, và Abdus Salam đã phát triển một lý thuyết để xử lý lực điện từ và lực hạt nhân yếu theo một cách thống nhất. Lý thuyết này, ngày nay gọi là *lý thuyết điện yếu*, tiên đoán sự tồn tại của ba hạt (gọi là W^+, W^- và boson Z) mà trước đây chưa bao giờ được quan sát thấy. Các hạt này đã được phát hiện một cách rõ ràng vào năm 1983 trong các thí nghiệm trên máy gia tốc (tức là va chạm một hạt dưới nguyên tử vào một hạt khác ở năng lượng cực cao) do hai nhà vật lý Carlo Rubbia và Simon van der Meer lãnh đạo.

Nhà vật lý Eugene Wigner, người đã đặt ra cụm từ "tính hiệu quả đến phi lý của toán học", đã đề xuất gọi tất cả những thành công ngoài mong đợi của các lý thuyết toán học là "định luật kinh nghiệm của nhận thức luận" (nhận thức luận là lĩnh vực nghiên cứu nguồn gốc và những giới hạn của tri thức). Nếu "định luật" này không đúng, ông lý luận, thì các nhà khoa học sẽ thiếu đi sự khích lệ và sự đảm bảo vốn là những thứ tuyệt đối cần thiết cho sự khám phá thấu đáo về các định luật của tự nhiên. Tuy nhiên, Wigner không đưa ra bất kỳ sự giải thích nào cho định luật kinh nghiệm này của nhận thức luận. Thay vào đó, ông xem nó như là một "món quà tuyệt vời" mà chúng ta nên biết ơn thậm chí mặc dù không hiểu được nguồn gốc của nó. Thực vậy, đối với Wigner, "món quà" này đã nắm bắt được cái cốt yếu của câu hỏi về tính hiệu quả đến phi lý của toán học.

Đến đây, tôi tin rằng chúng ta đã tập hợp đủ các đầu mối để ít nhất cũng có thể thử trả lời những câu hỏi mà chúng ta đã đặt ra từ đầu: Tại sao toán học lại hiệu quả và rất hữu ích trong việc giải thích thế giới xung quanh chúng ta đến mức thậm chí còn tạo nên những tri thức mới? Và toán học xét cho cùng là được phát minh hay khám phá?

CHƯƠNG 9

VỀ TRÍ TUỆ CON NGƯỜI, TOÁN HỌC VÀ VŨ TRỤ

Có hai câu hỏi liên quan với nhau theo những cách rất phức tạp, đó là: (1) Toán học có tồn tại độc lập với trí óc con người không? và (2) Tại sao các khái niệm toán học lại có khả năng ứng dụng vượt ra ngoài bối cảnh mà trong đó chúng được hình thành lúc ban đầu? Tuy nhiên, để việc bàn luận được đơn giản, tôi sẽ thử trình bày chúng theo một cách tuần tự.

Trước hết, bạn có thể băn khoăn tự hỏi các nhà toán học thời hiện đại đang đứng ở đâu trước câu hỏi: toán học là sự khám phá hay phát minh. Dưới đây là những gì mà nhà toán học Philip Davis và Reuben Hersh đã mô tả tình huống đó trong cuốn sách tuyệt vời của họ *Trải nghiệm toán học*.

> Hầu hết các nhà văn viết về chủ đề này dường như đều nhất trí rằng nhà toán học điển hình là một người theo chủ nghĩa Platon [tức là xem toán học là sự khám phá] vào các ngày trong tuần và là một nhà hình thức [xem toán học là sự phát minh] vào những ngày chủ nhật. Tức là, khi anh ta đang làm toán, thì anh ta tin rằng

> mình đang làm việc với một thực tại khách quan mà anh ta lao tâm khổ tứ xác định các tính chất của nó. Nhưng sau đó, khi đối mặt với thách thức phải đưa ra một sự giải thích triết học về thực tại đó thì anh ta cảm thấy dễ dàng nhất là giả vờ không tin vào nó một chút nào.

Ngoài sự liều lĩnh thay thế từ "anh ta hoặc cô ta" thành "anh ta" ở mọi chỗ, để phản ánh nhân khẩu học trong toán học đang thay đổi, tôi có ấn tượng rằng sự mô tả này sẽ tiếp tục đúng với nhiều nhà toán học và vật lý lý thuyết ngày hôm nay. Tuy nhiên, một số nhà toán học thế kỷ 20 đã có một quan điểm rạch ròi đứng về phía này hay phía khác. Dưới đây là quan điểm Platonic của G. H. Hardy trong cuốn *Lời biện minh của một nhà toán học*:

> Với tôi, và tôi cho là với hầu hết các nhà toán học cũng vậy, có một thực tại khác mà tôi sẽ gọi là "thực tại toán học"; và trong số các nhà toán học hay triết học không có một loại nhất trí nào về bản chất của thực tại toán học. Một số khẳng định rằng nó "thuộc về tinh thần" và theo một nghĩa nào đó thì chúng ta tạo dựng nên nó; số khác lại cho khẳng định rằng nó ở bên ngoài và độc lập với chúng ta. Ai đó có thể lý giải một cách thuyết phục về thực tại toán học hẳn sẽ giải quyết được rất nhiều vấn đề khó khăn nhất của siêu hình học. Nếu anh ta có thể bao hàm được cả thực tại vật lý trong lý giải của mình, thì anh ta sẽ giải quyết được tất cả.

> Thực ra tôi không mong muốn tranh cãi bất kỳ câu hỏi nào như vậy ở đây ngay cả khi tôi có đủ khả năng để làm điều đó, nhưng tôi sẽ phát biểu quan điểm riêng của tôi một cách võ đoán để tránh bất kỳ sự hiểu lầm nào dù là nhỏ. Tôi tin rằng thực tại toán học nằm ngoài chúng ta, rằng chức năng của chúng ta là khám phá ra hay *quan sát* nó, và rằng các định lý mà chúng ta chứng minh, và những thứ mà chúng ta mô tả một cách hùng hồn như là "những sáng tạo" của mình, đơn giản chỉ là sự ghi lại những gì chúng ta quan sát được. Quan điểm này cũng được khẳng định, dưới dạng này hay khác, bởi nhiều nhà triết học danh tiếng kể từ sau Plato, và tôi sẽ sử dụng thứ ngôn ngữ tự nhiên với người giữ quan điểm đó.

Hai nhà toán học Edward Kasner (1878-1955) và James Newman (1907-66) đã diễn đạt chính xác quan điểm ngược lại trong cuốn *Toán học và trí tưởng tượng*:

> Toán học được hưởng một uy danh mà không một sự bay bổng nào khác của tư duy có mục đích sánh được là điều không có gì đáng ngạc nhiên. Nó có thể tạo ra nhiều tiến bộ trong khoa học, và đồng thời trở nên không thể thiếu được trong những vấn đề thực tiễn và dễ dàng là kiệt tác của sự trừu tượng hóa thuần túy tới mức sự thừa nhận về tính siêu việt của nó trong số những thành tựu trí tuệ của loài người là điều mà nó xứng đáng được hưởng.
>
> Mặc dù tính siêu việt đó, nhưng sự tán thưởng đáng kể đầu tiên của toán học mới chỉ có được gần đây với

sự ra đời của hình học phi Euclid bốn chiều. Nói như thế không có nghĩa là đánh giá thấp những tiến bộ trong giải tích, lý thuyết xác suất, số học, tôpô và các lĩnh vực khác của toán học mà chúng ta đã bàn luận ở trên. Mỗi một lĩnh vực đó đều mở rộng toán học và làm sâu sắc thêm ý nghĩa của nó cũng như đã mở rộng và làm sâu sắc thêm sự hiểu biết của chúng ta về vũ trụ vật lý. Song không có lĩnh vực nào đóng góp cho nội quan toán học, cho tri thức về mối quan hệ giữa các bộ phận của toán học với nhau và với toàn bộ nhiều như là những dị giáo phi Euclid này.

Như là một kết quả của tinh thần phê phán quả cảm làm nảy sinh những dị giáo, chúng ta đã vượt qua được quan niệm cho rằng các chân lý toán học tồn tại độc lập và tách rời với trí óc của chúng ta. Thậm chí chúng ta còn cảm thấy lạ lùng là tại sao một quan niệm như vậy lại có thể đã từng tồn tại. Nhưng, đó chính là điều mà Pythagoras đã nghĩ và cả Descartes, cùng với hàng trăm nhà toán học vĩ đại khác trước thế kỷ 19. Ngày nay, toán học là không có gì ràng buộc; nó đã phá bỏ mọi xiềng xích của mình. Cho dù bản chất của nó là gì đi nữa, thì chúng ta đều thừa nhận rằng nó tự do như trí óc, và tham lam như trí tưởng tượng. Hình học phi Euclid là bằng chứng cho thấy toán học, không giống như âm nhạc của các thiên cầu, nó là tác phẩm thủ công của riêng con người, chỉ chịu những hạn chế được áp đặt bởi các luật của tư duy.

Vì vậy, trái ngược với tính chính xác và xác định vốn là dấu hiệu tiêu chuẩn của các phát biểu trong toán học, ở đây chúng

ta lại có sự không nhất trí về quan điểm, thường tiêu biểu hơn cho những tranh cãi trong triết học và chính trị. Chúng ta có nên ngạc nhiên về chuyện này không? Thực sự là không. Bởi lẽ câu hỏi toán học được phát minh hay khám phá thực sự không phải là một câu hỏi của toán học.

Khái niệm "khám phá" hàm ý sự tồn tại từ trước trong một thế giới nào đó, hoặc là thế giới thực hoặc là thế giới siêu hình. Còn khái niệm "phát minh" thì liên quan đến trí tuệ con người, hoặc là cá nhân hoặc là tập thể. Vì vậy, câu hỏi đó thuộc về tổ hợp các lĩnh vực có thể liên quan đến vật lý học, triết học, toán học, khoa học nhận thức, thậm chí nhân chủng học, song nó chắc chắn không phải thuộc riêng về toán học (ít nhất là không trực tiếp). Do đó, các nhà toán học có thể thậm chí không được trang bị tốt nhất để trả lời câu hỏi này. Xét cho cùng thì, các nhà thơ, vốn là những người có thể thực hiện đủ trò ảo thuật với ngôn ngữ, nhưng họ không nhất thiết phải là những nhà ngôn ngữ giỏi nhất; và những nhà triết học vĩ đại nhất nhìn chung cũng không phải là chuyên gia về các chức năng của não. Câu trả lời cho câu hỏi "khám phá hay phát minh" vì vậy chỉ có thể thu được (nếu có) từ sự khảo sát thận trọng mọi đầu mối, đúc rút từ nhiều lĩnh vực rất rộng lớn.

Siêu hình học, Vật lý học và nhận thức

Những người tin rằng toán học tồn tại trong một thế giới độc lập với con người lại chia làm hai phe khác nhau khi phải xác định bản chất của thế giới đó. Thứ nhất, là những nhà Platonic

thức thụ, mà đối với họ toán học ngụ trong một thế giới vĩnh cửu, trừu tượng của những dạng toán học. Thứ hai, là những người cho rằng các cấu trúc toán học thực tế là một bộ phận có thực của thế giới tự nhiên. Vì chúng tôi đã thảo luận về chủ nghĩa Plato thuần túy và một số hạn chế có tính triết học của nó một cách kỹ lưỡng, nên tôi sẽ nói chi tiết hơn về quan điểm thứ hai.

Người đưa ra cái có thể coi là một phiên bản cực đoan và tư biện nhất của kịch bản "toán học là một bộ phận của thế giới tự nhiên" là một đồng nghiệp của tôi, nhà vật lý thiên văn Max Tegmark của MIT.

Tegmark lý luận rằng "vũ trụ của chúng ta không chỉ được mô tả bằng toán học - mà nó *là* toán học" [nhấn mạnh của tác giả]. Lập luận của ông bắt đầu với một giả thuyết dễ nhất trí cho rằng có một thực tại vật lý bên ngoài tồn tại độc lập với con người. Sau đó ông tiếp tục khảo sát cái có thể là bản chất của lý thuyết tối hậu về một thực tại như vậy (mà các nhà vật lý gọi là "lý thuyết của vạn vật"). Vì thế giới vật lý này hoàn toàn độc lập với con người, Tegmark khẳng định, nên sự mô tả nó phải được giải phóng khỏi những "hành trang" của con người (ví dụ, đặc biệt là ngôn ngữ). Nói cách khác, lý thuyết cuối cùng này không thể bao hàm những khái niệm như "hạt dưới nguyên tử", "dây dao động", "không thời gian cong", hoặc những cấu trúc khác do con người nghĩ ra. Từ quan điểm đó, Tegmark kết luận rằng chỉ có một cách mô tả khả dĩ của vũ trụ, đó là sự mô tả chỉ liên quan đến những khái niệm trừu tượng và các mối quan hệ giữa chúng, mà ông lấy là định nghĩa "làm việc" của toán học.

Lập luận của Tegmark về thực tại toán học chắc chắn là hấp dẫn và nếu nó là đúng thì có thể đã tiến một bước dài trong việc giải quyết vấn đề về "tính hiệu quả đến phi lý" của toán học. Trong một thế giới được *xác định* như là toán học, thực tế rằng toán học ăn khớp với tự nhiên giống như một chiếc găng tay sẽ không có gì phải ngạc nhiên. Thật không may là tôi lại không thấy đường hướng suy luận của Tegmark là thực sự hấp dẫn. Bước nhảy từ sự tồn tại của một thực tại bên ngoài (độc lập với trí óc con người) tới kết luận, theo lời Tegmark, "Bạn phải tin vào cái mà tôi gọi là giả thuyết thế giới toán học: rằng thực tại vật lý của chúng ta là một cấu trúc toán học", thì cái bước nhảy ấy, theo quan điểm của tôi, có dính líu với một trò ảo thuật. Khi Tegmark cố gắng để mô tả toán học thực sự là gì, ông nói: "Với một nhà lôgic hiện đại, một cấu trúc toán học chính xác là một tập hợp các thực thể trừu tượng với các mối quan hệ giữa chúng". Nhưng nhà lôgic hiện đại này lại là con người! Nói cách khác, Tegmark chưa bao giờ thực sự *chứng minh* được rằng toán học của chúng ta không phải được phát minh bởi con người, mà ông chỉ đơn giản giả định như thế thôi. Hơn nữa, như nhà sinh học thần kinh Pháp Jean-Pierre Changeux đã chỉ ra để đáp lại một khẳng định tương tự: "Để tuyên bố thực tại vật lý là các đối tượng toán học, ở cấp độ các hiện tượng tự nhiên mà chúng tôi nghiên cứu trong sinh học, thì dường như đối với tôi, nó đặt ra một vấn đề nhận thức luận khá phiền toái. Làm thế nào mà một trạng thái vật lý, ở bên trong bộ não của chúng ta, lại biểu diễn cho một trạng thái vật lý khác ở bên ngoài nó?"

Hầu hết các nỗ lực khác nhằm đặt các đối tượng toán học một cách dứt khoát vào thực tại vật lý bên ngoài đơn giản chỉ dựa

vào tính hiệu quả của toán học trong việc giải thích tự nhiên, coi nó như là một bằng chứng. Tuy nhiên, điều này thừa nhận rằng không có một sự giải thích nào khác về tính hiệu quả của toán học là khả dĩ cả, mà quan điểm này, như tôi sẽ chứng tỏ dưới đây, là không đúng.

Nếu toán học không nằm trong thế giới Platonic phi thời gian và phi không gian và cũng không nằm trong thế giới vật lý, thì liệu điều đó có nghĩa là toán học hoàn toàn được phát minh bởi con người hay không? Hoàn toàn không. Thực tế, tôi sẽ chứng tỏ trong phần sau rằng hầu hết toán học đều bao gồm những khám phá. Tuy nhiên, trước khi đi xa hơn, sẽ là hữu ích nếu trước hết chúng ta hãy khảo sát một số quan điểm của các nhà khoa học đương đại về nhận thức. Lý do thật đơn giản - ngay cả nếu toán học hoàn toàn được khám phá thì những khám phá ấy vẫn được thực hiện bởi các nhà toán học là con người sử dụng bộ não của họ.

Với sự tiến triển mạnh mẽ trong khoa học nhận thức những năm gần đây, sẽ là chuyện hoàn toàn tự nhiên để kỳ vọng rằng các nhà sinh học thần kinh và tâm lý học sẽ chuyển sự chú ý của họ sang toán học, đặc biệt là sự tìm kiếm nền tảng của toán học trong nhận thức của con người. Liếc qua các kết luận của hầu hết các nhà khoa học về nhận thức thì ban đầu có thể để lại cho bạn ấn tượng rằng bạn đang chứng kiến sự hiện thân câu nói của Mark Twain "Với một người đang cầm búa thì mọi thứ đều trông như cái đinh". Với sự tăng giảm đôi chút trong sự nhấn mạnh, về căn bản, tất cả các nhà tâm lý học thần kinh và sinh học đều xác định toán học là sự phát minh của con người. Tuy nhiên, dựa trên những khảo sát kỹ lưỡng hơn, bạn sẽ thấy rằng trong khi sự diễn giải các dữ liệu nhận

thức còn xa mới được gọi là rõ ràng thì không có gì đáng ngờ rằng những nỗ lực nhận thức biểu hiện một giai đoạn mới và cách tân trong việc tìm kiếm nền tảng của toán học. Dưới đây là một ví dụ nhỏ nhưng tiêu biểu cho những bình luận của các nhà khoa học về nhận thức.

Nhà thần kinh học người Pháp là Stanislas Dehaene, người có mối quan tâm chủ yếu đến nhận thức số, đã kết luận trong cuốn sách của ông xuất bản vào năm 1997 nhan đề *Cảm giác số* rằng "trực giác về các con số được thả neo rất sâu trong bộ não của chúng ta". Thực tế, quan điểm này rất gần gũi với quan điểm của các nhà trực giác luận, những người muốn đặt nền móng cho toàn bộ toán học dưới dạng thuần túy trực giác về các số tự nhiên. Dehaene lý luận rằng những khám phá về tâm lý học của số học xác nhận rằng "số thuộc 'các đối tượng tự nhiên của tư duy', những phạm trù bẩm sinh mà theo chúng, chúng ta hiểu được thế giới". Đi theo một hướng nghiên cứu riêng biệt được tiến hành với người Mundurukú - một nhóm người Amazon bản xứ sống biệt lập - Dehaene và các cộng sự của mình đã bổ sung vào năm 2006 một đánh giá tương tự về hình học "Sự hiểu biết một cách tự phát những khái niệm hình học và các bản đồ của cộng đồng người ở vùng sâu vùng xa này đã cho ta một bằng chứng xác nhận rằng những kiến thức cốt lõi về hình học, cũng như số học cơ bản, đều là một cấu thành phổ quát của trí óc con người". Không phải mọi nhà khoa học về nhận thức đều nhất trí với kết luận này. Chẳng hạn, một số người chỉ ra rằng, thành công của người Mundurukú trong việc học hình học mới đây, trong đó họ cần phải nhận dạng được một đường cong trong số các đường thẳng, một hình chữ nhật trong số các hình vuông, một elip trong số các đường

tron, v.v..., có thể chỉ liên quan đến khả năng thị giác của họ biết chỉ ra một thứ khác biệt, chứ không phải là nhờ kiến thức hình học bẩm sinh".

Nhà sinh học thần kinh người Pháp Jean-Pierre Changeux, người đã có một cuộc đối thoại thú vị về bản chất của toán học với nhà toán học "thuộc trường phái Platonic" là Alain Connes trong cuốn *Cuộc nói chuyện về trí tuệ, vật chất và toán học*, đã cung cấp cho ta nhận xét sau đây:

> Cái lập luận rằng các đối tượng toán học không có liên quan gì đến thế giới cảm giác lại có liên quan... tới đặc tính có khả năng sinh sôi của chúng, chúng có thể sinh ra những đối tượng khác. Điều cần nhấn mạnh ở đây là có tồn tại trong bộ não cái mà ta có thể gọi là một "khoang ý thức", một loại không gian vật lý dành cho việc mô phỏng và sáng tạo ra những đối tượng mới... Trong một số phương diện, các đối tượng toán học mới này giống như các cơ thể sống: giống như các cơ thể sống, chúng là những đối tượng vật lý có thể tiến hóa rất nhanh; nhưng không giống với các cơ thể sống, với ngoại lệ đặc biệt là các vi rút, là chúng tiến hóa trong bộ não chúng ta.

Cuối cùng, phát biểu triệt để nhất trong vấn đề phát minh với khám phá đã được đưa ra bởi nhà ngôn ngữ học nhận thức George Lakoff và nhà tâm lý học Rafael Núñez trong cuốn sách phần nào gây tranh cãi *Toán học từ đâu tới*. Như tôi đã nhắc đến trong Chương 1, họ tuyên bố:

> Toán học là một phần tự nhiên của con người. Nó nảy sinh từ cơ thể, bộ não và kinh nghiệm hằng ngày của chúng ta trong thế giới này. [Lakoff và Núñez do đó nói rằng toán học xuất hiện từ một "trí tuệ được hiện thân"]... Toán học là một hệ thống các khái niệm của con người sử dụng một cách khác thường các công cụ thông thường của nhận thức con người... Con người chính là chủ thể đã sáng tạo ra toán học, và chúng ta vẫn là những người tiếp tục duy trì và mở rộng nó. Chân dung toán học mang gương mặt con người.

Các nhà khoa học về nhận thức đã đưa ra những kết luận của mình dựa vào cái mà họ gọi là một hiện thân hấp dẫn các bằng chứng được rút ra từ kết quả của rất nhiều thí nghiệm. Một số thí nghiệm này liên quan đến việc nghiên cứu sự tạo ảnh chức năng của bộ não trong quá trình thực hiện các nhiệm vụ toán học. Một số thí nghiệm khác khảo sát năng lực toán học của trẻ em, của các nhóm đi săn theo bầy đàn như người Mundurukú, những người chưa bao giờ đến trường, và của những người bị tổn thương não ở những mức độ khác nhau. Hầu hết các nhà nghiên cứu đều nhất trí rằng một số năng lực toán học dường như là bẩm sinh. Chẳng hạn, mọi người đều có thể chỉ bằng một cái liếc mắt thôi là nói được ngay họ vừa nhìn thấy một, hai, hay ba đồ vật (một khả năng được gọi là *subitizing,* tức là khả năng nhận ra số các vật được trình hiện trong thời gian ngắn ngủi mà không thực sự đếm, gốc từ tiếng Latinh *subito* có nghĩa là bất ngờ). Một phiên bản rất hạn chế của số học, dưới dạng xếp nhóm, xếp cặp, và phép cộng và trừ đơn giản, có thể là bẩm sinh, có lẽ cũng như một số hiểu biết cơ bản

về các khái niệm hình học (mặc dù khẳng định này còn gây tranh cãi hơn). Các nhà khoa học thần kinh cũng nhận ra các vùng trong não, chẳng hạn như các nếp góc ở bán cầu não trái, dường như quyết định đến việc xử lý các con số và tính toán toán hoc, song lại không quyết định đến ngôn ngữ hay ghi nhớ.

Theo Lakoff và Núñez, một công cụ chủ yếu cho sự tiến bộ vượt xa những năng lực bẩm sinh này chính là sự tạo dựng *các ẩn dụ có tính khái niệm* - đó là những quá trình tư duy nhằm diễn giải các khái niệm trừu tượng thành cụ thể hơn. Chẳng hạn, khái niệm số học được đặt trong ẩn dụ rất cơ bản về tập hợp các đối tượng. Mặt khác, đại số học trừu tượng hơn của Boole về các lớp cũng liên kết một cách ẩn dụ các lớp với các con số. Kịch bản tinh tế này được phát triển bởi Lakoff và Núñez cũng đưa ra những hiểu biết sâu sắc rất thú vị về việc tại sao con người lại thấy một số khái niệm toán học phức tạp hơn nhiều so với các khái niệm khác. Một số nhà nghiên cứu khác, như nhà khoa học thần kinh nhận thức Rosemary Varley thuộc Đại học Sheffield, cho rằng ít nhất thì một số cấu trúc toán học sống nhờ vào khả năng ngôn ngữ - những hiểu biết sâu sắc về toán học phát triển là nhờ sự vay mượn các công cụ trí tuệ vốn được sử dụng để xây dựng ngôn ngữ. Các nhà khoa học về nhận thức lấy một trường hợp khá mạnh để gắn toán học với trí tuệ con người và chống lại chủ nghĩa Plato. Dù vậy, điều rất thú vị là: cái mà tôi xem là lý lẽ mạnh nhất có thể chống lại được chủ nghĩa Plato lại không đến từ các nhà sinh học thần kinh, mà lại là từ ngài Michael Atiyah, một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của thế kỷ 20. Thực ra, tôi đã nhắc tới đường hướng suy luận của ông một cách ngắn gọn trong Chương 1, nhưng giờ đây tôi muốn trình bày một cách chi tiết hơn.

Nếu bạn phải lựa chọn một khái niệm toán học của chúng ta có xác suất cao nhất là khái niệm tồn tại độc lập với trí tuệ con người, thì bạn sẽ chọn khái niệm nào? Hầu hết mọi người chắc sẽ đều đưa ra kết luận rằng đó phải là các số tự nhiên. Còn điều gì có thể "tự nhiên" hơn 1, 2, 3,...? Thậm chí nhà toán học người Đức nghiêng về trực giác luận là Leopold Kronecker (1823-91) cũng có tuyên bố nổi tiếng: "Chúa đã tạo ra các số tự nhiên, tất cả những thứ còn lại là sản phẩm của con người". Vì vậy nếu người ta có thể chứng minh được rằng ngay cả các số tự nhiên, với tư cách là một khái niệm, cũng bắt nguồn từ trí tuệ con người, thì điều này sẽ là một lập luận hùng hồn nghiêng về phía hình mẫu "phát minh". Và đây, một lần nữa, lại là những gì mà Atiyah lập luận: "Chúng ta hãy hình dung trí tuệ không nằm ở con người, mà là ở con sứa lớn sống đơn độc và biệt lập, ẩn sâu dưới đáy Thái Bình Dương. Nó không trải nghiệm với các vật thể riêng rẽ nào, mà chỉ với nước bao quanh. Chuyển động, nhiệt độ và áp suất sẽ cung cấp cho nó những dữ liệu cảm nhận cơ bản. Trong một môi trường liên tục thuần khiết như vậy, sự gián đoạn, rời rạc sẽ không xuất hiện và do đó sẽ chẳng có gì để mà đếm cả". Nói cách khác, Atiyah đã xác tín rằng ngay cả một khái niệm cơ bản như các số tự nhiên cũng đã được *sáng tạo* bởi con người, bằng việc trừu tượng hóa (còn các nhà khoa học về nhận thức thì nói là, "thông qua các ẩn dụ") các yếu tố của thế giới vật lý. Nói một cách khác, số 12, chẳng hạn, biểu thị sự trừu tượng hóa một tính chất chung cho mọi thứ tạo thành một tá, tương tự như từ "tư duy" biểu thị cho một chuỗi những quá trình nảy sinh trong bộ não của chúng ta.

Bạn đọc có thể phản đối việc sử dụng vũ trụ giả thuyết của

con sứa để chứng minh quan điểm nay. Các bạn có thể cãi lý rằng chỉ có một vũ trụ duy nhất, vũ trụ tự nhiên, và rằng mọi giả thuyết đều cần phải được kiểm chứng trong cái vũ trụ đó. Tuy nhiên, điều này sẽ lại tương đương với việc thừa nhận rằng khái niệm các số tự nhiên, thực tế, lại phụ thuộc vào vũ trụ của kinh nghiệm con người ! Lưu ý rằng điều này chính xác là cái mà Lakoff và Nuñez muốn nói khi họ xem toán học như là "được hiện thân".

Tôi vừa lập luận rằng các khái niệm toán học của chúng ta bắt nguồn từ trí tuệ con người. Bạn có thể băn khoăn tự hỏi tại sao tôi lúc trước lại khăng khăng rằng hầu hết toán học thực tế là đã được khám phá ra, một quan điểm dường như là khá gần với những người theo chủ nghĩa Plato.

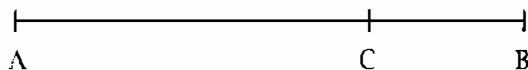
Phát minh *và* khám phá

Trong ngôn ngữ hằng ngày của chúng ta, sự phân biệt giữa khám phá và phát minh đôi khi thật rõ ràng, nhưng đôi khi cũng khá là mơ hồ. Không ai nói rằng Shakespeare đã khám phá ra Hamlet, hay Madame Curie đã phát minh ra nguyên tố phóng xạ rađi. Đồng thời, những loại dược phẩm mới dùng cho một số loại bệnh nhất định cũng thường được thông báo như là các khám phá, mặc dù chúng thường liên quan đến sự tổng hợp tinh xảo các hợp chất hóa học mới. Tôi muốn mô tả chi tiết hơn một chút về một ví dụ cụ thể trong toán học, mà tôi tin là không chỉ giúp ta phân biệt sự khác nhau giữa phát minh và khám phá mà còn tạo nên những hiểu biết sâu sắc có giá trị về quá trình mà theo đó toán học tiến hóa và phát triển.

Trong quyển VI của bộ *Cơ sở*, tác phẩm đồ sộ của Euclid về hình học, ta tìm thấy một định nghĩa về sự phân chia một đoạn thẳng thành hai phần không bằng nhau (một định nghĩa khác sớm hơn, thông qua các diện tích, xuất hiện ở quyển II). Theo Euclid, nếu đoạn AB được chia bởi điểm C (H. 62) theo cách sao cho tỷ số độ dài của hai đoạn được chia (AC/CB) bằng tỷ số của cả đoạn thẳng ban đầu và đoạn được chia có chiều dài lớn hơn (AB/AC), thì khi đó người ta nói rằng đoạn thẳng được chia theo "trung và ngoại tỷ". Nói cách khác, nếu AC/CB = AB/AC thì mỗi một tỷ số này được gọi là "trung và ngoại tỷ". Từ thế kỷ 19, tỷ số này thường được biết đến với cái tên *tỷ lệ vàng*. Chỉ bằng một số phép tính đại số đơn giản có thể chứng tỏ rằng tỷ lệ vàng bằng:

$$(1+\sqrt{5})/2 = 1,6180339887...$$

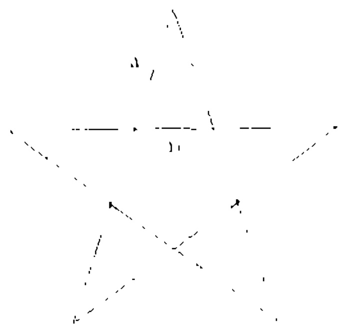
Câu hỏi đầu tiên mà bạn có thể hỏi là tại sao Euclid lại bận tâm đến việc định nghĩa sự phân chia đoạn thẳng cụ thể này và thậm chí còn đặt tên cho tỷ lệ đó nữa? Xét cho cùng thì có vô số các cách để phân chia một đoạn thẳng. Trả lời cho câu hỏi này có thể được tìm thấy trong di sản văn hóa, huyền thoại về Pythagoras và Plato. Hãy nhớ lại rằng các môn đệ của Pythagoras bị ám ảnh bởi các con số như thế nào. Họ coi các số lẻ như là nam tính và tốt, và đinh kiến hơn, họ xem các số chẵn như là nữ tính và xấu xa. Họ có tình yêu đặc biệt đối với



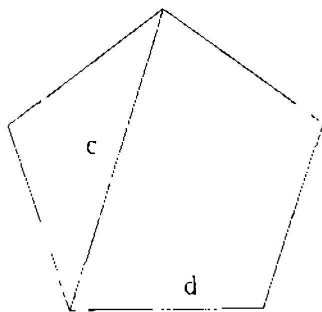
Hình 62

số 5, là sự hợp nhất của 2 và 3, số chẵn đầu tiên (giống cái) và số lẻ đầu tiên (giống đực). (Số 1 không được xem là một con số, mà là cái sinh ra mọi số). Vì vậy, đối với trường phái Pythagoras thì số 5 tượng trưng cho tình yêu và hôn nhân, và họ sử dụng hình ngôi sao năm cánh (H. 63) như là biểu tượng của tình huynh đệ của họ. Và đây chính là chỗ mà tỷ lệ vàng xuất hiện đầu tiên. Nếu bạn lấy một ngôi sao năm cánh đều, thì tỷ số của cạnh thuộc một tam giác bất kỳ và đáy của nó (*a/b* trong H. 63) đúng bằng tỷ lệ vàng. Tương tự như vậy, tỷ số của đường chéo bất kỳ trong một ngũ giác đều với một cạnh của nó (*c/d* trong H. 64) cũng đúng bằng tỷ lệ vàng. Thực tế, để dựng một hình ngũ giác đều bằng thước và compa (quá trình dựng hình phổ biến của người Hy Lạp cổ đại) đòi hỏi phải chia một đoạn thẳng theo tỷ lệ vàng.

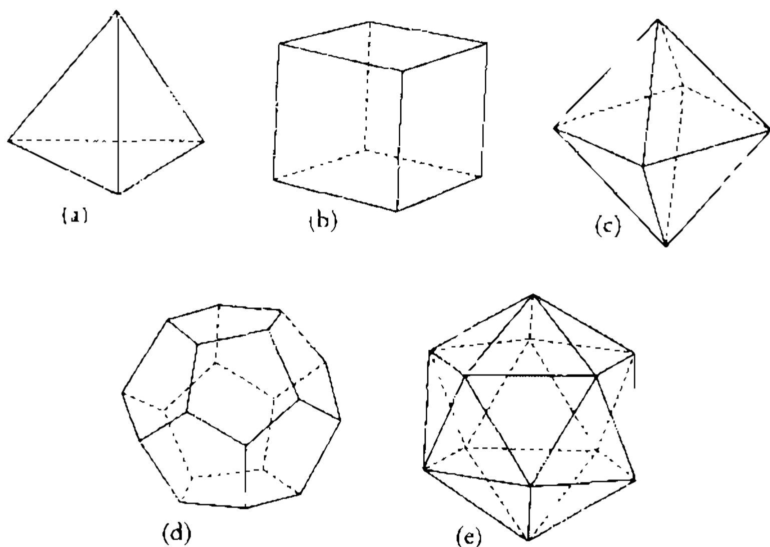
Plato bổ sung thêm một chiều nữa vào ý nghĩa thần thoại của tỷ lệ vàng. Người Hy Lạp cổ đại tin rằng mọi thứ trong vũ trụ đều được cấu tạo bởi bốn yếu tố: đất, lửa, không khí và nước. Trong cuốn *Timaeus*, Plato đã cố gắng giải thích cấu trúc của vật chất bằng cách sử dụng 5 hình khối đều mà ngày



Hình 63



Hình 64



Hình 65

nay mang tên ông - *các hình khối Plato* - (H. 65). Các hình khối lồi này bao gồm khối tứ diên, khối lập phương, khối bát diện, khối 12 mặt, và khối 20 mặt, đó là những hình khối duy nhất mà tất cả các mặt (của mỗi khối riêng rẽ) là như nhau và đều là các đa giác đều, đồng thời các đỉnh của mỗi khối đều nằm trên một mặt cầu. Plato đã gắn mỗi khối trong bốn hình khối đó với một trong bốn yếu tố cơ bản của vũ trụ. Chẳng hạn, Đất thì gắn với khối lập phương vững chãi, lửa sắc sảo thì gắn với tứ diện nhọn, không khí là bát diện, và nước là khối 20 mặt. Về khối 12 mặt (H. 65d), Plato đã viết trong *Timaeus*: "Vì vẫn còn một hình khối phức hợp nữa, hình khối thứ 5, nên Thượng đế đã sử dụng nó cho toàn bộ, thêu dệt nó với các thiết kế

của mình". Vì vậy hình khối 12 mặt biểu diễn toàn bộ vũ trụ. Tuy nhiên, lưu ý rằng hình khối 12 mặt, với 12 mặt ngũ giác của nó, có tỷ lệ vàng được viết ở khắp nơi. Cả thể tích và diện tích bề mặt của nó cũng được biểu thị như là những hàm số đơn giản của tỷ lệ vàng (điều này cũng đúng với khối 20 mặt).

Chính vì vậy, lịch sử đã cho thấy rằng bằng nhiều phép thử và sai, các môn đệ của Pythagoras và những người ủng hộ họ *đã khám phá* ra các cách để dựng một số hình hình học, mà đối với họ, chúng biểu thị những khái niệm quan trọng như tình yêu và toàn bộ vũ trụ. Nên không có gì là lạ khi họ, và Euclid (người cung cấp tư liệu về truyền thống này), *đã phát minh ra khái niệm* tỷ lệ vàng liên quan đến các phép dựng hình đó, và đã đặt tên cho nó. Không giống như bất kỳ tỷ lệ tùy ý nào khác, con số 1,618... giờ đã trở thành tâm điểm của một lịch sử nghiên cứu mạnh mẽ và phong phú, và tới tận ngày nay nó vẫn tiếp tục xuất hiện ở những chỗ bất ngờ nhất. Chẳng hạn, hai thiên niên kỷ sau Euclid, nhà thiên văn học người Đức Johannes Kepler *đã khám phá* ra rằng con số này lại xuất hiện một cách thần kỳ, liên quan đến một dãy số được gọi là *dãy Fabonaci*. Dãy Fabonaci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,... có đặc điểm là bắt đầu từ số thứ 3, mỗi số bằng tổng của hai số đứng trước nó (ví dụ, 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3 và cứ tiếp tục như vậy). Nếu bạn chia mỗi số trong dãy cho số đứng ngay trước nó (ví dụ 144 ÷ 89; 233 ÷ 144;...), bạn sẽ thấy các tỷ số này dao động xung quanh nhưng càng tiến gần đến tỷ lệ vàng khi bạn càng đi xa hơn trong dãy đó. Chẳng hạn, người ta thu được các kết quả sau đây (làm tròn các số đến hàng thập phân thứ 6 sau dấu phẩy): 144 ÷ 89 = 1,617978; 233 ÷ 144 = 1,618056; 377 ÷ 233 = 1,618026 và cứ tiếp tục như vậy.

Trong thời hiện đại hơn, dãy Fabonaci và cả tỷ lệ vàng nữa, còn được thấy trong sự sắp xếp lá của một số loại cây (hiện tượng này được gọi là *phyllotaxis)* và trong cấu trúc các tinh thể của một số hợp kim nhôm.

Tại sao tôi lại coi định nghĩa của Euclid về khái niệm tỷ lệ vàng là một phát minh? Vì chính hành động sáng tạo của Euclid đã chọn ra tỷ lệ này và thu hút sự chú ý của các nhà toán học tới nó. Trái lại, ở Trung Quốc, nơi khái niệm tỷ lệ vàng không được phát minh, các tài liệu toán học về cơ bản không nhắc gì đến nó. Ở Ấn độ, nơi một lần nữa khái niệm này cũng không được phát minh, chỉ có một vài định lý không quan trọng về lượng giác mới liên quan một cách xa xôi với tỷ lệ này.

Có nhiều ví dụ khác cho thấy câu hỏi "toán học là phát minh hay khám phá" vẫn được đặt ra một cách không thích đáng. *Toán học của chúng ta là sự tổ hợp của cả những phát minh và các khám phá.* Các tiên đề của hình học Euclid, với tư cách là một *khái niệm*, là một phát minh, cũng như quy tắc chơi cờ cũng là một phát minh. Các tiên đề cũng được bổ sung bởi một loạt các khái niệm được phát minh như các tam giác, hình bình hành, elíp, tỷ lệ vàng, và v.v. Trái lại, các định lý của hình học Euclid nói chung lại là những khám phá; chúng là những con đường kết nối các khái niệm khác nhau. Trong một số trường hợp, các chứng minh sinh ra các định lý - các nhà toán học khảo sát những cái mà họ có thể chứng minh và từ đó họ rút ra các định lý. Trong một số trường hợp khác, như được mô tả bởi Archimedes trong cuốn *Phương pháp*, họ trước hết tìm ra câu trả lời cho một câu hỏi cụ thể nào đó mà họ quan tâm rồi sau đó họ mới đi tìm cách chứng minh.

Thường thì các khái niệm là các phát minh. Các số nguyên tố, với tư cách *một khái niệm*, là một phát minh, song tất cả các định lý về số nguyên tố lại là những khám phá. Các nhà toán học của Babylon, Ai Cập và Trung Hoa cổ đại chưa bao giờ phát minh ra khái niệm số nguyên tố, mặc dù toán học của họ rất tiến bộ. Vậy thay vì thế, chúng ta có thể nói là họ đã không "khám phá" ra số nguyên tố không? Nói thế cũng chẳng khác gì khi chúng ta nói rằng nước Anh đã không "khám phá" ra một hiến pháp bằng văn bản, duy nhất và được luật hóa. Cũng như một quốc gia có thể tồn tại mà không cần có hiến pháp, toán học vẫn có thể phát triển mà không cần khái niệm về số nguyên tố. Và thực tế đã là như vậy!

Chúng ta có biết tại sao người Hy Lạp cổ đại đã phát minh ra những khái niệm như các tiên đề và số nguyên tố không? Chúng ta không biết chắc chắn, song chúng ta có thể phán đoán rằng đó là một phần trong những nỗ lực không mệt mỏi của họ để nghiên cứu những thành phần cơ bản nhất của vũ trụ. Các số nguyên tố là những viên gạch cơ bản tạo nên các số, cũng như các nguyên tử là những viên gạch tạo nên vật chất. Tương tự như vậy, những tiên đề là suối nguồn mà từ đó được xem là chảy ra mọi chân lý hình học. Hình khối 12 mặt biểu thị toàn bộ vũ trụ và tỷ lệ vàng là khái niệm đã đưa biểu tượng đó vào tồn tại.

Sự bàn luận này làm nổi lên một khía cạnh thú vị khác của toán học - đó là một phần của văn hóa loài người. Một khi người Hy Lạp đã phát minh ra phương pháp tiên đề, thì toàn bộ toán học châu Âu theo sau đều phù hợp với cùng triết học và thực tiễn. Nhà nhân chủng học Leslie A. White (1900-1975) đã từng cố gắng tóm tắt khía cạnh văn hóa này khi viết: "Nếu Newton

được nuôi dưỡng trong nền văn hóa Hottentot [một bộ lạc Nam Phi] thì ông chắc đã tính toán như một người Hottentot." Phức hợp văn hóa này của toán học rất có thể là nguyên nhân của thực tế là nhiều khám phá toán học (ví dụ như các bất biến của nút) và thậm chí một số phát minh quan trọng (ví dụ như phép tính vi tích phân) đã được tạo ra đồng thời bởi một số người làm việc độc lập với nhau.

Bạn có biết nói bằng toán học không?

Trong một mục trước, tôi đã so sánh sự nhập của khái niệm trừu tượng con số vào khái niệm ý nghĩa của một từ. Nếu vậy thì phải chăng toán học là một loại ngôn ngữ? Một mặt, những hiểu biết sâu sắc từ lôgic toán và mặt khác, từ ngôn ngữ học cho thấy rằng ở một chừng mực nào đó thì đúng là như vậy. Các công trình của Boole, Frege, Peano, Russell, Whitehead, Gödel, và những người ủng hộ đương đại của họ (đặc biệt là trong các lĩnh vực như cú pháp và ngữ nghĩa học triết học, và tương đồng trong ngôn ngữ học), đã chứng tỏ rằng ngữ pháp và suy luận có quan hệ mật thiết với đại số học của lôgic ký hiệu. Nhưng tại sao có tới hơn 6.500 ngôn ngữ trong khi lại chỉ có một toán học? Thực ra thì tất cả những ngôn ngữ khác nhau đều có nhiều đặc tính thiết kế chung. Chẳng hạn, nhà ngôn ngữ học người Mỹ Charles F. Hockett (1916-2000) đã hướng sự chú ý của những năm 1960 tới thực tế rằng mọi ngôn ngữ đều có những phương thức lập sẵn cho việc tạo nên các từ và cụm từ mới (như "*home page*" (trang chủ), "*laptop*" (máy tính xách tay); "*indie flick*" (buổi chiếu phim độc lập); và đại loại

như vậy). Tương tự, mọi ngôn ngữ của con người đều tính đến sự trừu tượng hóa (như "*surrealism*" (chủ nghĩa siêu thực), "*abssence*" (sự thiếu vắng), "*greatness*" (sự vĩ đại); sự phủ định ("not" (không), "hasn't"), và những câu giả định ("Nếu bà có bánh xe thì bà đã có thể là chiếc xe buýt rồi). Có lẽ hai trong số những đặc tính quan trọng của mọi ngôn ngữ là *đuôi mở* và *tự do-kích thích*. Tính chất thứ nhất biểu thị khả năng sáng tạo ra những lời nói chưa bao giờ được nghe trước đây và khả năng hiểu được những lời đó. Chẳng hạn, tôi có thể dễ dàng viết một câu như sau: "Bạn không thể sửa chữa đập ngăn nước Hoover bằng kẹo cao su được" và mặc dù thậm chí bạn có thể chưa bao giờ gặp câu nói này trước đây, nhưng bạn vẫn dễ dàng hiểu được nó. Tự do-kích thích là khả năng lựa chọn nên đáp ứng như thế nào đối với một kích thích nhận được. Chẳng hạn, câu trả lời cho câu hỏi do ca sỹ/nhạc sỹ Carole King đặt ra trong bài hát của bà "*Ngày mai anh vẫn sẽ còn yêu em chứ?*" có thể là bất kỳ câu trả lời nào sau đây: "Anh không biết liệu anh có còn sống đến ngày mai không"; "Tất nhiên rồi"; "Anh thậm chí không yêu em hôm nay"; "Không nhiều bằng anh yêu con chó của anh"; "Đây quả là một bài hát hay nhất của em"; hay thậm chí "Anh tự hỏi ai sẽ thắng ở giải Úc mở rộng năm nay". Bạn sẽ nhận thấy rằng nhiều đặc tính trong số này (chẳng hạn như trừu tượng hóa; phủ định; mở; và khả năng tiến hóa) cũng là đặc tính của toán học.

Như tôi đã nói trước đây, Lakoff và Núñez đã nhấn mạnh vai trò của ẩn dụ trong toán học. Các nhà ngôn ngữ học nhận thức cũng cho rằng mọi ngôn ngữ của loài người đều sử dụng những ẩn dụ để biểu đạt hầu như mọi thứ. Thậm chí có lẽ còn quan trọng hơn, kể từ năm 1957, năm mà nhà ngôn ngữ học nổi

tiếng Noam Chomsky cho xuất bản tác phẩm mang tính cách mạng của mình *Những cấu trúc cú pháp*, rất nhiều nỗ lực ngôn ngữ học đã xoay quanh khái niệm *ngữ pháp phổ quát* - những nguyên lý chi phối mọi ngôn ngữ. Nói cách khác, cái dường như là Tháp Babel của tính đa dạng có lẽ đã thực sự che giấu một sự tương đồng đáng kinh ngạc về cấu trúc. Thực tế, nếu không phải như vậy thì các từ điển dịch từ ngôn ngữ này sang ngôn ngữ khác đã không bao giờ thực hiện được.

Bạn có thể vẫn còn băn khoăn tại sao toán học lại thống nhất như vậy, cả về phương diện chủ đề lẫn phương diện ký hiệu. Phần đầu của câu hỏi này đặc biệt hấp dẫn. Hầu hết các nhà toán học đều nhất trí rằng toán học như chúng ta biết đã tiến hóa từ những nhánh cơ bản của hình học và số học được thực hiện bởi những người Babylon, Hy Lạp và Ai Cập cổ đại. Tuy nhiên, liệu có thực sự là tất yếu rằng toán học phải khởi đầu từ những môn học cụ thể này hay không? Nhà khoa học máy tính Stephen Wolfram đã lập luận trong cuốn sách đồ sộ của mình nhan đề *Một loại khoa học mới* rằng không nhất thiết như vậy. Đặc biệt, Wolfram đã cho thấy làm thế nào xuất phát từ các tập hợp những quy tắc đơn giản có tác dụng giống như những chương trình máy tính ngắn gọn (được gọi là các *automat tế bào*), người ta có thể phát triển được một loại toán học hoàn toàn khác. Các automat này có thể được sử dụng (ít nhất là về nguyên tắc) như là các công cụ cơ bản để mô hình hóa các hiện tượng tự nhiên, thay cho các phương trình vi phân đã từng thống trị khoa học trong suốt ba thế kỷ. Vậy thì điều gì đã dẫn dắt các nền văn minh cổ đại tiến tới khám phá và phát minh ra cái "kiểu" toán học đặc biệt của chúng ta? Tôi thực sự không biết, song có thể nó liên quan nhiều đến các đặc điểm

của hệ thông cảm nhận của con người. Con người phát hiện và cảm nhận các cạnh, các đường thẳng và các đường cong trơn một cách rất dễ dàng. Chẳng hạn, hãy chú ý xem bạn có thể xác định (chỉ bằng mắt thôi) một đường có đúng là thẳng hay không chính xác đến mức nào, hoặc bạn có thể dễ dàng phân biệt như thế nào giữa một đường tròn và một hình trông có vẻ hơi elip. Những khả năng nhận thức này có thể có tác dụng mạnh mẽ trong việc làm hình thành kinh nghiệm của con người về thế giới, và vì vậy có thể dẫn tới một kiểu toán học dựa trên những đối tượng rời rạc (số học) và các hình hình học (hình học Euclid). Tính thống nhất trong ký hiệu có nhiều khả năng là kết quả của cái mà ta có thể gọi là "hiệu ứng Microsoft Window": Toàn bộ thế giới sử dụng hệ điều hành của Microsoft - không phải bởi vì sự tuân thủ này là tất yếu, mà chỉ là vì một khi một hệ điều hành bắt đầu thống trị thị trường máy tính thì mọi người phải chấp nhận nó để dễ dàng liên lạc và bởi vì sự sẵn có của sản phẩm. Tương tự như vậy, ký hiệu phương Tây đã áp đặt sự thống nhất trên toàn thế giới toán học.

Một điều hấp dẫn là, các nhà thiên văn học và vật lý thiên văn vẫn còn tiếp tục đóng góp cho câu hỏi "phát minh và khám phá" theo những cách rất thú vị. Những nghiên cứu mới nhất về các hành tinh ngoài hệ Mặt trời chỉ ra rằng khoảng 5% các ngôi sao có ít nhất một hành tinh khổng lồ (như Mộc tinh trong hệ Mặt trời của chúng ta) quay xung quanh, và tỷ phần đó vẫn còn gần như không thay đổi, khi tính trung bình trên toàn dải Ngân Hà. Trong khi đó tỷ phần chính xác của *các hành tinh kiểu Trái đất* vẫn chưa được biết, song vẫn có cơ may vì thiên hà này có tới hàng tỷ các hành tinh như vậy. Ngay cả nếu chỉ một tỷ phần nhỏ (nhưng không phải là không

đang kể) các "Trái đất" này ở trong *vùng có thể ở được* (phạm vi quỹ đạo cho phép có nước lỏng trên bề mặt của hành tinh) xung quanh những ngôi sao chủ của chúng, thì xác suất có sự sống nói chung và sự sống có trí tuệ nói riêng, phát triển trên bề mặt của các hành tinh này sẽ không phải là zero. Nếu phát hiện được một dạng sự sống có trí tuệ khác mà chúng ta có thể liên lạc được thì chúng ta có thể sẽ có những thông tin vô giá về những hình thức luận được phát triển bởi nền văn minh này để giải thích vũ trụ. Khi đó, chúng ta không chỉ sẽ tiến một bước không thể tưởng tượng được trong sự hiểu biết về nguồn gốc và tiến hóa của sự sống, mà chúng ta thậm chí còn có thể so sánh lôgic của mình với hệ thống lôgic của các sinh vật có thể còn tiến bộ hơn.

Trong một ghi chép có nhiều tính tư biện, một số kịch bản trong vũ trụ học (ví dụ, một kịch bản có tên là *lạm phát vĩnh cửu*) đã dự đoán khả năng tồn tại của các đa vũ trụ. Một vài vũ trụ này có thể không chỉ được đặc trưng bởi các giá trị khác nhau của *các hằng số của tự nhiên* (ví dụ như cường độ của các lực khác nhau; tỷ lệ khối lượng giữa các hạt hạ nguyên tử), mà còn bởi các quy luật khác nhau của tự nhiên nữa. Nhà vật lý thiên văn Max Tegmark đã cho rằng lẽ ra nên có một vũ trụ tương ứng với (hay theo ngôn từ của ông *là*) mỗi cấu trúc toán học khả dĩ. Nếu điều này là đúng thì đây sẽ là một phiên bản cực đoan của quan điểm "vũ trụ *là* toán học" - không chỉ có một thế giới có thể đồng nhất với toán học mà là toàn bộ tập hợp của chúng. Thật không may là, không chỉ tư biện này là quá cấp tiến và hiện còn chưa được kiểm chứng, mà nó còn dường như (ít nhất là dưới dạng đơn giản nhất của nó) mâu thuẫn với cái được gọi là *nguyên lý của tính thông thường*. Như tôi đã mô

tả ở Chương 5, nếu bạn lấy một người ngẫu nhiên trên đường phố, thì bạn sẽ có 95% cơ may là chiều cao của người đó sẽ nằm giữa hai độ lệch chuẩn tính từ chiều cao trung bình. Một lập luận tương tự cũng có thể được áp dụng cho các tính chất của vũ trụ. Nhưng số các cấu trúc toán học khả dĩ tăng khủng khiếp cùng với sự phức tạp tăng. Điều này có nghĩa là hầu hết cấu trúc "bình thường" (gần với trung bình) cũng sẽ phức tạp một cách không thể tin nổi. Điều này dường như là kỳ quặc so với tính đơn giản tương đối của toán học và các lý thuyết của chúng ta về vũ trụ, và như vậy thì trái với kỳ vọng tự nhiên là vũ trụ của chúng ta phải là một vũ trụ điển hình.

Câu đố của Wigner

"Toán học được phát minh hay khám phá?" là một câu hỏi được đặt sai bởi vì nó hàm ý rằng câu trả lời phải hoặc là cái này hoặc là cái kia và hai khả năng này loại trừ lẫn nhau. Thay vì thế, tôi đề nghị rằng toán học một phần là được phát minh và một phần được khám phá. Con người nhìn chung phát minh ra các khái niệm toán học và khám phá ra mối quan hệ giữa các khái niệm đó. Một số khám phá có tính kinh nghiệm chắc chắn là đã có trước khi hình thành các khái niệm, song bản thân các khái niệm chắc chắn đã mang đến một động lực để có thêm nhiều định lý được khám phá. Tôi cũng cần lưu ý rằng một số nhà triết học của toán học, như Hilary Putnam người Mỹ, đã chấp nhận một quan điểm trung gian được gọi là *chủ nghĩa hiện thực* - họ tin vào tính khách quan của các biện luận toán học (tức là, các mệnh đề là đúng hoặc sai, và điều khiến

cho chúng là đúng hay sai thì ở bên ngoài con người) nhưng lại không cam kết về sự tồn tại của "các đối tượng toán học" như những môn đệ của Platon. Có những hiểu biết sâu sắc nào trong số này cũng dẫn tới một sự giải thích thỏa đáng câu đố về "tính hiệu quả đến phi lý" của Wigner hay không?

Trước hết tôi xin tóm tắt một vài giải pháp tiềm năng được một số nhà tư tưởng đương thời đưa ra. Người đoạt giải Nobel vật lý David Gross viết:

> Một quan điểm mà, từ kinh nghiệm của tôi, là không hề bất thường giữa các nhà toán học sáng tạo - cụ thể là các cấu trúc toán học mà họ đạt tới không phải là những sáng tạo của trí tuệ con người mà thực ra lại có tính tự nhiên như thể chúng là thực như các cấu trúc được các nhà vật lý tạo ra để mô tả cái được gọi là thế giới thực. Nói cách khác, các nhà toán học không phát minh ra toán học mới, mà họ khám phá ra nó. Nếu đúng như vậy thì có lẽ một số bí ẩn mà chúng ta đang khám phá [như "tính hiệu quả đến phi lý"] sẽ trở nên hơi ít bí ẩn hơn. Nếu toán học là các cấu trúc và các cấu trúc này là một phần thực của thế giới tự nhiên, thực như các khái niệm của vật lý lý thuyết, thì sẽ không có gì đáng ngạc nhiên rằng nó là một công cụ hiệu quả trong việc phân tích thế giới thực.

Nói cách khác, ở đây Gross dựa vào một phiên bản của quan điểm "toán học như là sự khám phá" nằm ở đâu đó giữa thế giới Platonic và thế giới "vũ trụ *là* toán học", song gần với quan điểm Platonic hơn. Tuy nhiên, như chúng ta đã thấy, hỗ trợ

về mặt triết học cho tuyên bố "toán học như là sự khám phá là rất khó khăn". Hơn nữa, chủ nghĩa Plato không thể thực sự giải quyết được vấn đề về độ chính xác phi thường mà tôi đã mô tả ở Chương 8, một quan điểm mà Gross đã thừa nhận.

Ngài Michael Atiyah, mà tôi rất ủng hộ quan điểm của ông về bản chất của toán học, đã biện luận như sau:

> Nếu người ta xem xét bộ não trong bối cảnh tiến hóa của nó thì thành công đầy bí ẩn của toán học trong các khoa học tự nhiên ít nhất cũng đã được giải quyết một phần nào. Bộ não tiến hóa là để ứng phó với thế giới tự nhiên, và vì vậy không nên quá kinh ngạc là nó đã phát triển một ngôn ngữ, toán học, phù hợp tốt với mục đích đó.

Đường hướng suy luận này rất tương tự với các giải pháp do các nhà khoa học về nhận thức đề xuất. Tuy nhiên, Atiyah cũng thừa nhận rằng giải thích này khó có thể giải quyết được những phần gai góc hơn của vấn đề - làm thế nào mà toán học giải thích được những khía cạnh bí ẩn hơn của thế giới tự nhiên. Đặc biệt, giải thích này còn để lại câu hỏi về cái mà tôi gọi là tính hiệu quả "thụ động" (những khái niệm toán học tìm kiếm những ứng dụng rất lâu sau khi được phát minh ra) hoàn toàn bỏ ngỏ. Atiyah viết: "Những người hoài nghi có thể chỉ ra rằng cuộc đấu tranh sinh tồn chỉ đòi hỏi chúng ta phải đối mặt với các hiện tượng vật lý ở thang bậc con người, trong khi lý thuyết toán học dường như giải quyết thành công ở mọi thang bậc từ nguyên tử cho đến thiên hà". Và ông chỉ khuyến nghị: "Có lẽ sự giải thích nằm trong bản chất có tôn ti thứ bậc trừu tượng

của toán học cho phép chúng ta chuyển lên, chuyển xuống các thang của vũ trụ một cách tương đối dễ dang.

Nhà toán học và khoa học máy tính người Mỹ là Richard Hamming (1915-98) đã có một cuộc thảo luận khá thú vị và rất sâu rộng về câu đố của Wigner vào năm 1980. Trước hết, về câu hỏi bản chất của toán học, ông kết luận rằng "toán học được tạo bởi con người và do đó có thể thay đổi khá liên tục bởi con người". Sau đó, ông đề xuất bốn cách giải thích tiềm tàng cho tính hiệu quả đến phi lý của toán học: (1) các hiệu ứng lựa chọn; (2) sự tiến hoa của các công cụ toán học; (3) sức mạnh giải thích có giới hạn của toán học; (4) sự tiến hóa của con người.

Hãy nhớ lại rằng hiệu ứng lựa chọn là những sai lệch được đưa vào các kết quả của thí nghiệm hoặc là do các công cụ được sử dụng hoặc do cách thức thu thập dữ liệu. Chẳng hạn, nếu trong một kiểm chứng về tính hiệu quả của một chương trình ăn kiêng, nhà nghiên cứu loại đi những người rút khỏi cuộc thử nghiệm, thì điều này sẽ làm thiên lệch kết quả, vì hầu hết những người bỏ cuộc là những người mà đối với họ chương trình không hiệu quả. Nói cách khách, Hamming đề xuất rằng ít nhất trong một số trường hợp, "hiện tượng ban đầu này sinh từ những công cụ toán học mà chúng ta sử dụng chứ không phải từ thế giới thực... thì rất nhiều thứ mà chúng ta nhìn thấy là từ cái kính mà chúng ta đang đeo". Để làm ví dụ, ông chỉ ra một cách đúng đắn rằng người ta có thể chứng minh mọi lực phát ra một cách đối xứng từ một điểm (và bảo toàn năng lượng) trong không gian ba chiều sẽ hành xử theo quy luật nghịch đảo bình phương, và vì vậy khả năng áp dụng định luật vạn vật hấp dẫn của Newton là không có gì phải ngạc

nhiên. Quan điểm của Hamming được cho là hay, song các hiệu ứng lựa chọn có thể rất khó giải thích được độ chính xác tuyệt vời của một số lý thuyết.

Giải pháp tiềm tàng thứ hai của Hamming dựa trên thực tế rằng con người lựa chọn, và liên tục cải tiến toán học, để cho phù hợp với một tình huống đã cho. Nói cách khác, Hamming cho rằng chúng ta đang chứng kiến cái mà chúng ta có thể gọi là "sự tiến hóa và chọn lọc tự nhiên" của các ý tưởng toán học - loài người phát minh ra một số lượng lớn các khái niệm toán học, và chỉ những khái niệm nào phù hợp mới được lựa chọn. Trong nhiều năm, tôi cũng đã từng tin rằng đây là một giải thích hoàn chỉnh. Một lý giải tương tự cũng đã được đề xuất bởi nhà vật lý đoạt giải Nobel Steven Weinberg trong cuốn *Những giấc mơ về một lý thuyết cuối cùng* của ông. Nhưng liệu đó đã là sự giải đáp *dứt điểm* cho câu đố của Wigner hay chưa? Không nghi ngờ gì rằng sự tiến hóa và lựa chọn như vậy đã thực sự diễn ra. Sau khi sàng lọc qua nhiều hình thức luận và công cụ toán học, các nhà khoa học giữ lại những thứ hiệu quả, và họ không ngần ngại nâng cấp chúng hoặc thay đổi chúng thành những cái tốt hơn. Song ngay cả nếu chúng ta chấp nhận ý tưởng này, thì tại sao lại có những lý thuyết toán học có thể giải thích được cả vũ trụ?

Quan điểm thứ ba của Hamming cho rằng ấn tượng của chúng ta về tính hiệu quả của toán học có thể, trong thực tế, chỉ là một ảo tưởng, vì có nhiều thứ trong thế giới xung quanh chúng ta mà toán học thực sự chưa giải thích được. Ủng hộ cho quan điểm này, để làm ví dụ, tôi xin lưu ý rằng nhà toán học Israil Moseevich Gelfand đã từng được trích lời phát biểu sau: "Chỉ có một thứ phi lý hơn tính hiệu quả đến phi lý của toán học trong vật lý học, và đó là *tính phi hiệu quả* đến phi

lý [nhấn mạnh của tác giả] của toán học trong sinh học". Tôi không nghĩ là điều này tự thân nó có thể giải thích được vấn đề của Wigner. Sự thật là không giống như *Cẩm nang cho những người xin quá giang tới thiên hà*[1], chúng ta không thể nói rằng câu trả lời cho sự sống, cho vũ trụ và mọi thứ là bốn mươi hai. Tuy nhiên, có một số lượng đủ lớn các hiện tượng mà toán học đã thực sự *làm* sáng tỏ được để bảo đảm cho một sự giải thích. Hơn nữa thế nữa, phạm vi của các sự kiện và các quá trình mà toán học có thể được lý giải được vẫn tiếp tục được mở rộng.

Giải thích thứ tư của Hamming là rất tương đồng với quan điểm do Atiyah đề xuất, cho rằng "sự tiến hóa theo Darwin sẽ chọn lọc một cách tự nhiên để đảm bảo sống sót những dạng có khả năng cạnh tranh của sự sống, những dạng này đã có trong đầu óc của chúng những mô hình tốt nhất của thực tại - "tốt nhất" ở đây nghĩa là tốt nhất cho sự tồn tại và truyền giống."

Nhà khoa học máy tính Fef Raskin (1943-2005), người đã bắt đầu với dự án Macintosh của hãng Apple, cũng giữ quan điểm tương tự nhưng với sự nhấn mạnh đặc biệt đến vai trò của lôgic. Raskin kết luận rằng

---

[1] Cuốn tiểu thuyết nổi tiếng đã được dựng thành kịch, phim truyền hình *"Cẩm nang cho những người xin quá giang tới thiên hà"* của nhà văn Anh Douglas Adams (xuất bản năm 1979) kể về các nhân vật tới thăm hành tinh Magrathea huyền thoại để tìm hiểu về nền công nghiệp chế tạo các hành tinh nay đã sụp đổ. Ở đó họ gặp Slartibartfast, một người chuyên thiết kế bờ biển của các hành tinh. Thông qua các ghi chép lưu trữ ông kể lại câu chuyện về một chủng tộc siêu thông minh, những người đã chế tạo thành công một máy tính tên là Deep Thought để tính đáp số cho Câu hỏi tối hậu của Sự sống, Vũ trụ và Vạn vật. Khi đáp số được hé lộ ra là 42, thì Deep Thought lại dự đoán rằng một máy tính khác, mạnh hơn chính nó, sẽ được nó thiết kế và chế tạo để tính toán câu hỏi cho đáp số đó. (Sau này dựa vào đó, Adams đã tạo ra câu đố 42, một câu đố mà dù được tiếp cận theo nhiều cách khác nhau thì tất cả đều thu được đáp số là 42) - ND

> lôgic của con người được áp đặt lên chúng ta bởi thế giới vật lý tự nhiên và do đó phù hợp với nó. Toán học rút ra từ lôgic. Chính vì thế mà toán học phù hợp với thế giới vật lý. Không có bí ẩn gì ở đây cả - mặc dù chúng ta không nên để mất đi cảm giác về sự kỳ diệu và ngạc nhiên đối với bản chất của các sự vật ngay cả khi chúng ta đã hiểu được chúng một cách tốt hơn.

Hamming ít tin hơn, thậm chí bởi sức mạnh lập luận của chính ông. Ông chỉ ra rằng:

> nếu bạn lấy 4000 năm là tuổi của khoa học, nói chung, thì bạn sẽ có được cận trên của 200 thế hệ. Khi xem xét những hậu quả của tiến hóa mà chúng ta đang tìm kiếm thông qua sự lựa chọn những biến thiên may rủi nhỏ, thì đối với tôi, có vẻ như tiến hóa không có thể giải thích được nhiều hơn một phần nhỏ của tính hiệu quả đến phi lý của toán học.

Raskin khăng khăng rằng "cơ sở của toán học được đặt trong tổ tiên chúng ta từ rất lâu về trước, chắc có lẽ cũng đến hàng triệu thế hệ". Tuy nhiên, phải nói ngay rằng tôi không thấy lập luận này thực sự có sức thuyết phục. Ngay cả nếu lôgic đã được nhúng sâu trong não của tổ tiên chúng ta thì cũng khó mà thấy được làm thế nào mà khả năng này lại có thể dẫn đến những lý thuyết toán học trừu tượng của thế giới hạ nguyên tử, chẳng hạn như cơ học lượng tử, những lý thuyết tỏ ra chính xác đến lạ lùng.

Điều đáng kể là Hamming đã kết luận bài báo của mình bằng sự thừa nhận rằng "mọi sự giải thích mà tôi đưa ra khi gộp

lại với nhau một cách đơn giản thì lại không đủ để giải thích điều mà tôi muốn lý giải" (mà cụ thể là tính hiệu quả đến phi lý của toán học).

Vì vậy, liệu chúng ta có nên khép lại bằng việc thừa nhận rằng tính hiệu quả đến phi lý của toán học vẫn còn là bí ẩn như khi chúng ta mới bắt đầu xem xét không?

Trước khi từ bỏ, chúng ta hãy cố chắt lọc ra điều cốt lõi của câu đố của Wigner bằng việc xem xét cái được gọi là *phương pháp khoa học*. Trước hết, các nhà khoa học biết về những sự kiện của tự nhiên thông qua một chuỗi những thí nghiệm và quan sát. Những sự kiện đó ban đầu được sử dụng để phát triển một số loại mô hình định tính của các hiện tượng (như Trái đất hút quả táo; các hạt hạ nguyên tử va chạm với nhau có thể sinh ra các hạt khác; vũ trụ đang giãn nở; v.v... Trong nhiều nhánh của khoa học, ngay cả các lý thuyết xuất hiện vẫn có thể còn ở dạng phi toán học. Một trong các ví dụ tốt nhất về một lý thuyết kiểu này có khả năng giải thích mạnh mẽ là thuyết tiến hóa của Darwin. Thậm chí mặc dù chọn lọc tự nhiên không dựa trên một hình thức luận toán học nào, song thành công của nó trong việc làm sáng tỏ nguồn gốc của các loài là rất đáng kể. Trái lại, trong vật lý cơ bản, thường thì bước tiếp theo sẽ liên quan đến những nỗ lực nhằm xây dựng các lý thuyết toán học, định lượng (như thuyết tương đối rộng; điện động lực học lượng tử; lý thuyết dây, v.v.). Cuối cùng, các nhà nghiên cứu sử dụng các mô hình toán học đó để tiên đoán các hiện tượng mới, các hạt mới và những kết quả của các thí nghiệm và quan sát chưa bao giờ-được-thực-hiện-trước-đây. Điều khiến Wigner và Einstein bối rối chính là sự thành công kỳ lạ của hai quá trình sau. Làm thế nào mà có thể hết lần này đến lần khác các

nhà vật lý luôn tìm được các công cụ toán học không chỉ giải thích được những kết quả thí nghiệm và quan sát đang hiện hữu mà còn dẫn tới những hiểu biết sâu sắc hoàn toàn mới và những tiên đoán mới?

Tôi sẽ cố gắng trả lời câu hỏi này bằng cách vay mượn một ví dụ tuyệt vời từ nhà toán học Reuben Hersh. Hersh đã đề xuất rằng theo tinh thần của việc phân tích nhiều bài toán như vậy trong toán học (và thực tế là trong vật lý lý thuyết) ta nên xem xét trường hợp đơn giản nhất có thể. Xét thí nghiệm dường như hết sức tầm thường là cho các viên sỏi vào một cái bình không trong suốt. Giả sử đầu tiên bạn bỏ vào bốn viên sỏi trắng, rồi sau bỏ vào bảy viên sỏi đen. Tại một thời điểm nào đó trong lịch sử của mình, loài người nhận thấy rằng vì một số mục đích, họ có thể biểu diễn một tập hợp các viên sỏi có màu sắc nhất định bằng một khái niệm trừu tượng mà họ phát minh ra - một số tự nhiên. Tức là, tập hợp của các viên sỏi trắng có thể gắn với số 4 (hay IIII hay IV hay bất kỳ ký hiệu nào khác được sử dụng vào thời đó) và các viên sỏi đen được gắn với số 7. Thông qua việc thực nghiệm theo kiểu mà tôi vừa mô tả trên đây, loài người cũng khám phá ra rằng một khái niệm khác được phát minh - phép cộng số học - đã biểu diễn đúng đắn hành động vật lý của sự kết tập. Nói cách khác, kết quả của quá trình trừu tượng này được ký hiệu là 4+7 có thể tiên đoán một cách rõ ràng số sỏi cuối cùng có trong bình. Vậy toàn bộ điều này có ý nghĩa là gì? Nó có nghĩa là loài người đã phát triển được một công cụ toán học kỳ diệu, cho phép tiên đoán được một cách đáng tin cậy kết quả của *bất kỳ* thí nghiệm nào thuộc kiểu này! Công cụ này thực sự ít tầm thường hơn người ta tưởng rất nhiều, vì nó lại không vận

hành được với các giọt nước, chẳng hạn. Nếu bạn cho bốn giọt nước khác nhau vào bình, sau đó cho tiếp bảy giọt nước nữa, bạn sẽ không nhận được 11 giọt nước khác nhau trong bình. Thực tế, để làm được bất kỳ kiểu tiên đoán nào đối với các thí nghiệm tương tự với chất lỏng (hay khí) loài người phải phát minh ra những khái niệm hoàn toàn khác (như cái cân, chẳng hạn) và nhận ra rằng họ phải cân riêng từng giọt nước hoặc từng thể tích khí.

Bài học ở đây quá rõ ràng. Các công cụ toán học không được lựa chọn một cách tùy tiện mà đúng hơn phải thật chính xác dựa trên khả năng tiên đoán đúng đắn của chúng đối với kết quả của các thí nghiệm hoặc quan sát có liên quan. Vì vậy ít nhất với trường hợp rất đơn giản này, tính hiệu quả của chúng về căn bản là đã được bảo đảm. Loài người không cần phải đoán trước toán học đúng đắn là gì. Tự nhiên đã ưu ái cho họ tha hồ thử và sai để quyết định cái gì là có hiệu quả. Họ cũng không phải sử dụng các công cụ như nhau cho mọi trường hợp. Đôi khi hình thức luận toán học thích hợp với một vấn đề đã cho lại chưa tồn tại và ai đó phải phát minh ra nó (như trường hợp của Newton phát minh ra phép tính vi tích phân, hay các nhà toán học hiện đại phát minh ra các ý tưởng tôpô/hình học khác nhau trong bối cảnh những nỗ lực hiện nay trong lý thuyết dây). Trong những trường hợp khác, hình thức luận đã thực sự tồn tại nhưng ai đó cần khám phá ra rằng đó chính là giải pháp đang chờ đợi bài toán thích hợp (như trong trường hợp Einstein sử dụng hình học Riemann, hay các nhà vật lý hạt sử dụng lý thuyết nhóm). Vấn đề là thông qua sự ham hiểu biết cháy bỏng, sự cố chấp bướng bỉnh, trí tưởng tượng sáng tạo và một quyết tâm mạnh mẽ, loài người đã tìm ra những

hình thức luận toán học thích hợp cho việc lập mô hình một số lượng lớn các hiện tượng vật lý.

Một đặc tính của toán học cực kỳ quan trọng đối với cái mà tôi gọi là tính hiệu quả "thụ động", đó là sự đúng đắn về cơ bản là vĩnh cửu của nó. Hình học Euclid vẫn còn là đúng đắn cho đến tận hôm nay như nó đã từng là thế vào năm 300 trước CN. Chúng ta ngày nay hiểu rằng các tiên đề của nó không phải là tất yếu và thay vì biểu thị các chân lý tuyệt đối về không gian, chúng biểu thị các chân lý trong một vũ trụ cụ thể được cảm nhận bởi con người và hình thức luận được con người phát minh ra có liên quan của nó. Tuy nhiên, một khi chúng ta hiểu thấu đáo được bối cảnh giới hạn hơn thì mọi định lý vẫn còn đúng. Nói cách khác, các nhánh của toán học đang được sát nhập thành những nhánh lớn hơn, toàn diện hơn (như hình học Euclid chỉ là một phiên bản khả dĩ của hình học), song tính đúng đắn bên trong mỗi nhánh vẫn được duy trì. Chính tuổi thọ vô hạn này cho phép các nhà khoa học ở bất kỳ thời điểm đã cho nào tìm kiếm những công cụ toán học phù hợp trong toàn bộ kho tàng hình thức luận đã được phát triển.

Ví dụ đơn giản về những viên sỏi trong bình vẫn chưa xử lý được hai yếu tố của câu đố Wigner. Thứ nhất, vẫn còn đó câu hỏi là tại sao trong một số trường hợp, dường như từ lý thuyết chúng ta nhận được độ chính xác cao hơn so với khi chúng ta đặt vào nó? Trong thí nghiệm với các viên sỏi, độ chính xác của kết quả "được tiên đoán" (kết tập các số viên sỏi khác nhau) không tốt hơn độ chính xác của các thí nghiệm dẫn đến sự hình thành nên "lý thuyết" (phép cộng số học) ngay từ ban đầu. Trái lại, trong lý thuyết hấp dẫn của Newton chẳng hạn, độ chính xác của những tiên đoán của nó lại tỏ ra vượt xa độ chính xác

của những kết quả quan sát đã dẫn đến lý thuyết này. Tại sao vậy? Một sự xem xét lại ngắn gọn lịch sử của lý thuyết của Newton có thể cung cấp cho ta một sự hiểu biết sâu sắc thêm.

Mô hình địa tâm (coi Trái Đất là trung tâm của vũ trụ - ND) của Ptolemy đã thống trị khoảng 15 thế kỷ. Trong khi mô hình này không hề có tính phổ quát nào - sự chuyển động của mỗi hành tinh được nghiên cứu một cách riêng rẽ - và không hề đề cập đến các nguyên nhân vật lý (như các lực; gia tốc), thì sự phù hợp với các quan sát lại là hợp lý. Nicolaus Copernicus (1473-1543) đã công bố mô hình nhật tâm của mình vào năm 1543, và Galileo, có thể nói rằng, đã đặt nó lên một nền tảng vững chắc. Galileo cũng đã thiết lập những nền tảng cho các định luật của chuyển động. Nhưng chính Kepler mới là người đã rút ra từ quan sát những định luật toán học đầu tiên (dù chỉ là có tính hiện tượng luận) của chuyển động của các hành tinh. Ông đã sử dụng một tập hợp đồ sộ các dữ liệu mà nhà thiên văn Tycho Brahe đã để lại để xác định quỹ đạo của Hỏa tinh. Ông coi hàng trăm trang tính toán liên miên như là "cuộc chiến tranh của tôi với Hỏa tinh[1]". Ngoại trừ hai sai lệch, còn thì quỹ đạo tròn phù hợp với mọi quan sát. Dù vậy, Kepler vẫn chưa hài lòng với lời giải này và về sau ông đã mô tả quá trình tư duy của mình: "Nếu tôi tin rằng chúng ta có thể bỏ qua 8 phút (góc) này [tức là khoảng 1/4 đường kính góc của Mặt trăng tròn], thì tôi sẽ sửa lại giả thiết của tôi... cho phù hợp. Giờ thì vì không được phép như vậy, nên chỉ 8 phút góc đó thôi đã chỉ ra con đường tiến tới cải cách hoàn toàn trong thiên văn học". Những hệ quả của sự tỉ mỉ, cẩn trọng này là rất ấn tượng.

Đây là trò chơi chữ, Mars (Hỏa tinh) trong thần thoại Hy Lạp là thần chiến tranh.

Kepler đã suy ra rằng quỹ đạo của các hành tinh không phải hình tròn mà là hình elip, và ông đã phát biểu thêm hai quy luật định lượng nữa áp dụng được cho *tất cả* các hành tinh. Khi các định luật này kết hợp với các định luật của Newton về chuyển động, chúng trở thành cơ sở cho định luật vạn vật hấp dẫn của Newton. Tuy nhiên, hãy nhớ lại cái cách mà Descartes đưa ra lý thuyết của mình về lốc xoáy, trong đó các hành tinh được mang đi quanh Mặt trời bởi lốc xoáy của các hạt chuyển động tròn. Lý thuyết này đã không đi được xa, ngay cả trước khi Newton chứng minh nó mâu thuẫn, vì Descartes không bao giờ phát triển một cách xử lý toán học hệ thống cho các lốc xoáy của mình.

Vậy chúng ta học được gì từ lịch sử ngắn ngủi này? Không thể nghi ngờ gì rằng định luật vạn vật hấp dẫn của Newton chính là sản phẩm của một thiên tài. Song thiên tài ấy không thể hoạt động trong chân không được. Một số nền tảng đã được lát đặt một cách cẩn thận bởi các nhà khoa học trước đó. Như tôi đã lưu ý ở Chương 4, ngay cả những nhà toán học kém hơn Newton rất nhiều, như kiến trúc sư Christopher Wren và nhà vật lý Robert Hooke, cũng đã đề xuất một cách độc lập về định luật hấp dẫn nghịch đảo bình phương. Sự vĩ đại của Newton thể hiện ở khả năng độc nhất vô nhị của ông trong việc tổ hợp tất cả chúng lại với nhau tạo nên một thuyết thống nhất và ở sự kiên định của ông trong việc cung cấp một chứng minh toán học cho hệ quả của lý thuyết đó. Tại sao hình thức luận này lại chính xác đến như vậy? Một phần là vì nó giải quyết được vấn đề cơ bản nhất - lực giữa hai vật thể hấp dẫn nhau và chuyển động kết quả. Không có những yếu tố làm phức tạp hóa nào khác tham gia vào. Chính đối với vấn đề này và

chỉ vấn đề này thôi mà Newton đã thu được một lời giải hoàn chỉnh. Vì vậy, lý thuyết cơ bản là cực kỳ chính xác song các ứng dụng của nó phải trải qua một quá trình tinh lọc liên tục. Hệ Mặt trời được cấu tạo bởi hơn hai thiên thể. Khi tính đến cả tác dụng của các hành tinh khác (vẫn theo định luật nghịch đảo bình phương), các quỹ đạo sẽ không còn là những hình elíp đơn giản nữa. Chẳng hạn, quỹ đạo của Trái đất được tìm thấy là sẽ thay đổi dần định hướng của nó trong không gian, trong một chuyển động được gọi là *tiến động*, tương tự như chuyển động được biểu hiện bởi trục của một con quay. Trong thực tế, những nghiên cứu hiện đại cho thấy, trái với những kỳ vọng của Laplace, quỹ đạo của các hành tinh có thể cuối cùng sẽ trở nên hỗn độn. Tất nhiên, bản thân lý thuyết cơ bản của Newton sau này được xếp gộp vào thuyết tương đối rộng của Einstein. Và sự xuất hiện của lý thuyết đó cũng đến sau một loạt những khởi đầu sai lầm và ngấp nghé thành công. Vì vậy độ chính xác của một lý thuyết là không thể lường trước được. Qua thử thách mới biết hay dở - những sửa đổi và điều chỉnh vẫn tiếp tục được thực hiện cho đến khi đạt được độ chính xác mong muốn. Một số ít trường hợp mà trong đó đạt được độ chính xác thượng thừa chỉ trong một bước quả là biểu hiện của sự thần kỳ.

Rõ ràng là có một thực tế quan trọng nằm trong nền tảng khiến cho sự tìm kiếm các định luật cơ bản trở nên có giá trị. Quả thực tự nhiên đã rất tử tế với chúng ta khi nó được chi phối bởi các quy luật *phổ quát*, chứ không phải bởi những luật lệ cục bộ nhỏ hẹp. Một nguyên tử hydro trên Trái đất, ở mép phía bên kia của dải Ngân hà, hay thậm chí ở trên một thiên hà cách xa 10 tỷ năm-ánh sáng, vẫn hành xử chính xác theo

cùng một cách. Và điều đó là đúng ở mọi hướng và tại mọi thời điểm chúng ta quan sát. Các nhà toán học và vật lý đã phát minh ra một thuật ngữ toán học để gán cho các tính chất như vậy; chúng được gọi là *tính đối xứng* và chúng phản ánh tính miễn trừ thay đổi về vị trí, định hướng, hay thời gian mà bạn bấm đồng hồ của mình. Nếu không có những tính đối xứng này (và khác nữa), thì mọi hy vọng giải mã bản thiết kế vĩ đại của tự nhiên sẽ biến mất, vì các thí nghiệm sẽ phải được lặp lại một cách liên tục ở mọi điểm của không gian (nếu sự sống nảy sinh được trong một vũ trụ như vậy). Một đặc tính khác của vũ trụ là những ẩn náu bên trong nền của các lý thuyết toán học được gọi là *tính địa phương*. Điều này phản ánh năng lực của chúng ta trong việc xây dựng nên "bức tranh lớn" giống như trò chơi ghép hình, xuất phát từ sự mô tả những tương tác cơ bản nhất giữa các hạt cơ bản.

Giờ thì chúng ta đi đến yếu tố cuối cùng của câu đố Wigner: Điều gì bảo đảm rằng một lý thuyết toán học rốt cuộc sẽ tồn tại? Nói cách khác, tại sao lại có một lý thuyết tương đối rộng, chẳng hạn? Hay là không thể *không* tồn tại một lý thuyết toán học về hấp dẫn?

Câu trả lời thực sự là đơn giản hơn bạn tưởng. Thực tế không có những đảm bảo gì hết! Vẫn tồn tại vô số những hiện tượng mà đối với chúng không có những dự đoán chính xác nào là khả dĩ, ngay cả là về nguyên tắc. Loại này bao gồm, ví dụ như, nhiều hệ động lực tạo nên *hỗn độn*, trong đó sự thay đổi nhỏ nhất của các điều kiện ban đầu cũng có thể tạo ra những kết quả cuối cùng hoàn toàn khác nhau. Các hiện tượng có thể bộc lộ những hành vi kiểu như vậy gồm có thị trường chứng khoán, hình mẫu thời tiết trên núi Rocky, quả nảy trong máy chơi trò

có quay, khói bay lên từ một điếu thuốc lá, và thực sự là cả quỹ đạo của các hành tinh trong hệ Mặt trời. Nói như vậy không có nghĩa là các nhà toán học không phát triển được những hình thức luận tài tình để có thể giải quyết được một số các khía cạnh quan trọng của những vấn đề này, song chưa có một lý thuyết tất định nào có khả năng tiên đoán là tồn tại cả. Toàn bộ các lĩnh vực xác suất và thống kê đã được sáng tạo ra một cách chính xác nhằm xử lý những lĩnh vực mà trong đó người ta không có một lý thuyết tạo ra được nhiều hơn những thứ mà người ta đặt vào. Tương tự như vậy, một khái niệm được gọi là *độ phức tạp tính toán* vạch ra giới hạn của khả năng của chúng ta trong việc giải quyết những bài toán bằng các giải thuật thực tiễn, và các định lý bất toàn của Gödel đã đánh dấu những giới hạn nhất định của toán học ngay trong chính bản thân nó. Vì vậy toán học thực sự có hiệu quả phi thường đối với một số mô tả, đặc biệt là về khoa học cơ bản, nhưng toán học không thể mô tả được vũ trụ chúng ta trong tất cả mọi chiều kích của nó. Ở một phạm vi nào đó, các nhà khoa học thường lựa chọn sẽ làm việc trên vấn đề nào là dựa trên cơ sở những vấn đề đó có thể dẫn được đến cách xử lý toán học.

Vậy chúng ta đã giải quyết được dứt điểm bí ẩn của tính hiệu quả của toán học hay chưa? Tôi chắc chắn là đã đưa ra đóng góp tốt nhất của mình, nhưng tôi rất nghi ngờ rằng tất cả mọi người đều đã bị thuyết phục hoàn toàn bởi những lập luận mà tôi đã trình bày rõ ràng trong cuốn sách này. Tuy nhiên, tôi xin trích dẫn lời của Bertrand Russell trong cuốn *Những vấn đề của triết học*:

Vậy hãy gút lại sự bàn luận của chúng ta về giá trị của triết học; Triết học cần được nghiên cứu không phải vì bất kỳ câu trả lời rõ ràng nào cho các câu hỏi của nó, bởi vì không có những câu trả lời xác định nào, như thường lệ, lại có thể được biết là đúng cả, mà đúng hơn là vì chính bản thân những câu hỏi đó; vì những câu hỏi này mở rộng quan niệm của chúng ta về những cái khả dĩ, làm giàu thêm trí tưởng tượng trí tuệ của chúng ta và làm giảm bớt đi những quả quyết giáo điều bịt kín trí tuệ đối với sự tư biện; nhưng trên hết là vì, thông qua sự vĩ đại của vũ trụ mà triết học chiêm nghiệm, trí óc cũng trở nên rộng lớn hơn, và có thể hợp nhất với vũ trụ làm nên sự tốt đẹp nhất của nó.

CHÚA TRỜI CÓ PHẢI LÀ NHÀ TOÁN HỌC?

MARIO LIVIO

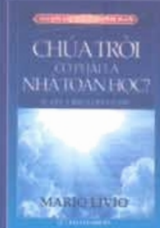
Phạm Văn Thiều - Phạm Thu Hằng dịch

Chịu trách nhiệm xuất bản: NGUYỄN MINH NHỰT
Biên tập: HẢI VÂN
Bìa: BÙI NAM
Sửa bản in: THANH VIỆT
Trình bày: VŨ PHƯỢNG

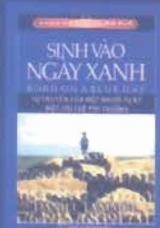
NHÀ XUẤT BẢN TRẺ
Địa chỉ: 161B Lý Chính Thắng, Phường 7,
Quận 3, Thành phố Hồ Chí Minh
Điện thoại: (08) 39316289 - 39316211 - 39317849 - 38465596
Fax: (08) 38437450
E-mail: nxbtre@hcm.vnn.vn
Website: www.nxbtre.com.vn

CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN TRẺ TẠI HÀ NỘI
Địa chỉ: Phòng 602, số 209 Giảng Võ, Phường Cát Linh,
Quận Đống Đa, Thành phố Hà Nội
Điện thoại: (04) 37734544
Fax: (04) 35123395
E-mail: chinhanh@nxbtre.com.vn

Khổ: 14,5 cm x 20,5 cm, số: 98-2011/CXB/16-07/Tre
Quyết định xuất bản số 101A/QĐ-Tre, ngày 28 tháng 02 năm 2011
In 3.000 cuốn, tại Xí nghiệp In Nguyễn Minh Hoàng
In xong và nộp lưu chiểu quí 1 năm 2011


CHÚA TRỜI
CÓ PHẢI LÀ
NHÀ TOÁN HỌC?
MARIO LIVIO

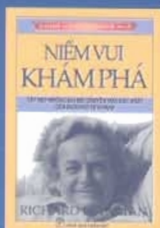

HIỆU ỨNG
CON BƯỚM
LÝ THUYẾT HỖN ĐỘN
JAMES GLEICK

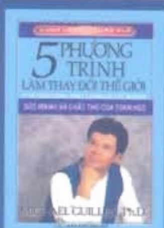

SINH VÀO
NGÀY XANH

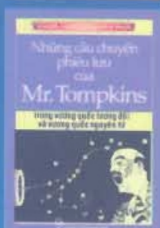

BẠN
MÃI TRẺ

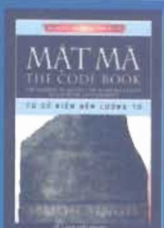

DÒNG SÔNG
TRÔI KHUẤT
ĐỊA ĐÀNG


CUỘC CHIẾN
LỖ ĐEN

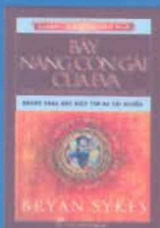

NIỀM VUI
KHÁM PHÁ


5 PHƯƠNG
TRÌNH
LÀM THAY ĐỔI THẾ GIỚI


Những câu chuyện
phiêu lưu
của
Mr. Tompkins
trong vương quốc tương đối
và vương quốc nguyên tử


MẬT MÃ
THE CODE BOOK
TỪ CỔ ĐIỂN ĐẾN LƯỢNG TỬ

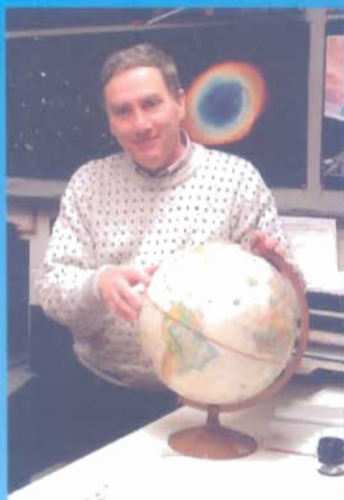

ĐỊNH LÝ
CUỐI CÙNG
CỦA FERMAT


BẢY
NÀNG CON GÁI
CỦA EVA
BRYAN SYKES


THẾ GIỚI
LƯỢNG TỬ
KỲ BÍ


Chuyển Đổi Lớn
NICHOLAS CARR

GS. **MARIO LIVIO** là nghiên cứu viên cao cấp về vật lý thiên văn thuộc Viện Khoa học Quản lý Kính thiên văn Không gian Hubble. Ông cũng là trưởng phòng quan hệ công chúng của Viện này. Trước khi vào làm việc tại Viện năm 1991, ông tốt nghiệp ngành vật lý và toán học tại trường Đại học Hebrew ở Jerusalem, lấy bằng thạc sĩ vật lý hạt tại Viện Weizman và bằng tiến sĩ về vật lý thiên văn lý thuyết tại Đại học Tel-Aviv, Israel. Ông là giáo sư thuộc Khoa vật lý của Học viện Công nghệ Technion-Israel từ 1981 đến 1991.



Tình yêu của ông đối với vật lý thiên văn thật mãnh liệt. Ông đặc biệt quan tâm tới sự kết tụ khối lượng của lỗ đen và các sao lùn trắng. Trong khoảng chục năm gần đây ông tập trung nghiên cứu về những vụ nổ sao siêu mới và sử dụng chúng trong vũ trụ học để xác định tốc độ giãn nở của vũ trụ, về bản chất của năng lượng tối, về sự hình thành các lỗ đen, các hành tinh xung quanh các ngôi sao trẻ và về sự sống có trí tuệ trong Vũ trụ. Mario đã công bố hơn 400 bài báo khoa học.

Ngoài những mối quan tâm về khoa học ông còn rất đam mê nghệ thuật. Tủ sách nhà ông có tới hàng trăm cuốn sách về nghệ thuật. Trong ít năm trở lại đây, ông đã kết hợp niềm đam mê khoa học và nghệ thuật của mình trong ba cuốn sách phổ biến khoa học: ***Vũ trụ tăng tốc*** (xuất bản năm 2002) đề cập đến "vẻ đẹp" của các lý thuyết cơ bản về Vũ trụ, ***Tỷ lệ vàng*** (xuất bản năm 2002) kể về một con số đặc biệt với rất nhiều tính chất đáng kinh ngạc và ***Phương trình không thể giải được*** (xuất bản năm 2005) nói về Lý thuyết nhóm – ngôn ngữ của đối xứng – viết dưới dạng phổ biến. Cuốn sách bạn đang cầm trên tay (xuất bản năm 2009) đề cập đến câu hỏi tại sao toán học lại hiệu quả và có sức mạnh ghê gớm trong việc mô tả từ các định luật của tự nhiên cho tới tính chất của các nút thắt. Mario còn là một diễn giả nổi tiếng trước công chúng.

Mario cũng thường xuyên được các phương tiện thông tin đại chúng phỏng vấn. Cuốn sách ***Tỷ lệ vàng*** (NXB Trẻ) của ông đã được trao Giải thưởng Peano năm 2003 và Giải thưởng quốc tế mang tên Pythagoras năm 2004, là cuốn sách phổ biến hay nhất về toán học.



ISBN 978-604-1-00143-5
Chúa trời có phải..toán học?



Giá **105.000 đ**